ALEPH$_0$ / ALGÈBRE

nombres réels / calcul numérique
nombres complexes

Terminale CDE



ALEPH$_0$ / ALGÈBRE

Terminale CDE

nombres réels, calcul numérique, nombres complexes

C. GAUTIER
G. GIRARD
D. GERLL
C. THIERCÉ
A. WARUSFEL

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers a été étendu à des "nombres" cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée. Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de $\mathbb{N}$ lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

Classiques Hachette, 79 Boulevard Saint-Germain, Paris

ALEPH$_0$

conforme aux nouveaux programmes

classes de seconde ACT

ALGÈBRE
C. GAUTIER, G. GIRARD ET A. LENTIN
1 ensembles / applications / nombres réels
2 fonctions et équations numériques

GÉOMÉTRIE
G. GIRARD ET C. THIERCÉ
1 plan affine / plan vectoriel
2 géométrie vectorielle / géométrie affine
3 géométrie métrique
4 géométrie dans l'espace et géométrie descriptive

AB classes de première CDE

MATHÉMATIQUE (AB)
C. GAUTIER, G. GIRARD ET C. THIERCÉ
1 ensembles / statistique / probabilités / fonctions
2 géométrie métrique / trigonométrie

ALGÈBRE (CDE)
C. GAUTIER, G. GIRARD ET A. LENTIN
1 ensembles / statistique / probabilités
2 fonctions numériques / applications diverses

GÉOMÉTRIE (CDE)
G. GIRARD ET C. THIERCÉ
1 espaces vectoriels / espaces affines
2 géométrie métrique

classes terminales

C. GAUTIER, D. GERLL, G. GIRARD, C. THIERCÉ ET A. WARUSFEL

A	MATHÉMATIQUE	
B	MATHÉMATIQUE	1 fonctions / calcul intégral 2 fonctions logarithmes et exponentielles statistique / probabilités
C	ALGÈBRE	nombres entiers
D	MATHÉMATIQUE	géométrie / statistique
E	MATHÉMATIQUE	géométrie descriptive / algèbre
CE	GÉOMÉTRIE	1 et 2 éléments de géométrie affine et euclidienne
CDE	ALGÈBRE	nombres réels, calcul numérique, nombres complexes
	ANALYSE	1 calcul différentiel, applications 2 calcul intégral, applications

Préface

Ce fascicule est consacré à l'étude des nombres réels et des nombres complexes.

Dans la première partie, qui a été traitée dans le même esprit que le fascicule réservé aux seuls élèves de Terminale C (nombres entiers), *nous avons choisi délibérément d'écarter toute construction explicite du corps* $\mathbb{R}$. *Celui-ci a été présenté comme un* corps commutatif totalement ordonné, *où les coupures :*

$$\begin{cases} \mathbb{R} = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad A \neq \varnothing, \quad B \neq \varnothing \\ (x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \quad \Longrightarrow \quad x < y), \end{cases}$$

définissent toujours un nombre réel z tel que :

$$(x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant z \leqslant y).$$

Cela admis, une théorie cohérente de $\mathbb{R}$ *s'ensuit, et les propriétés fondamentales de la* borne supérieure *et des* intervalles emboîtés *en découlent d'une manière simple, préparant les élèves à la notion d'*encadrement, *si importante pour le* calcul numérique.

Agissant ainsi axiomatiquement, nous pensons (à la suite de J. Dieudonné, par exemple) que la théorie complète des coupures de $\mathbb{Q}$, *ainsi que celle des suites de Cauchy, doivent rester réservées à l'enseignement supérieur où leur utilité et leur subtilité sont mieux admises. De toutes manières, elles supposent une construction de* $\mathbb{Q}$, *hors programme, alors que ce corps n'est autre que l'intersection des parties de* $\mathbb{R}$ *contenant* 1, *stables pour la soustraction et la division.*

Le corps $\mathbb{C}$ *des nombres complexes posait d'autres problèmes. L'extension quadratique par* $(X^2 + 1)$ *nous étant interdite à ce niveau, conformément au programme, nous avons suivi l'identification de* $\mathbb{C}$ *à un certain ensemble de matrices d'ordre* 2. *Rappelons néanmoins que les problèmes rassemblés sous le n°* **3.160** *du fascicule d'*Algèbre *Terminale C, et sous le n°* **4.96** *du présent fascicule permettent aux élèves de suivre une autre voie sans doute moins artificielle (l'étude des* nombres duaux, *esquissée dans cet exercice, nous paraît en particulier formatrice quant à la compréhension de la véritable nature d'une extension).*

*La partie la plus délicate concernait, sans aucun doute, la notion d'*argument. *Dans la confusion non encore totalement dissipée à ce jour qui caractérise tout ce qui est angulaire, nous avons résolument conservé notre ligne de conduite :* traiter tout le programme avec un scrupule qui nous interdit tout « à-peu-près », fût-ce au prix d'un alourdissement encore inévitable. *Mais nous croyons avoir beaucoup tempéré le foisonnement d'applications reliant entre eux matrices, angles, mesures (telles que Cos et cos, entre autres) par l'usage constant, que le professeur ne manquera pas de renforcer encore, de* diagrammes *élémentaires très intuitifs. Tout cela est actuellement encore trop abstrait pour beaucoup d'entre nous ; mais nous espérons que l'expérience pédagogique en cours, dans laquelle notre livre joue un rôle que nous voudrions positif, permettra la naissance d'une nouvelle intuition qui donnera à ces notions une perspective plus nette et plus stable d'où les concepts essentiels se dégageront avec une force qu'ils n'ont peut-être pas encore.*

Bien entendu, pour ce fascicule comme pour tous les autres, nous serons très intéressés par toute remarque que nos collègues seront amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de relever certaines erreurs nous ayant échappé ; surtout, ce contact nous guidera pour une exploitation meilleure, dans les futures éditions, des choix pédagogiques que nous soumettons aujourd'hui à la critique des enseignants et de leurs élèves.

LES AUTEURS

MATHÉMATIQUE / CLASSES TERMINALES

NOUVEAUX PROGRAMMES

Arrêté du 14 Mai 1971

SECTION A

PARTIE OBLIGATOIRE

Fonctions exponentielles et logarithmes

I. Révision des notions relatives à la continuité, aux limites, à la dérivation d'une fonction réelle d'une variable réelle. Dérivée d'une fonction composée.

On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle, et si sa dérivée est positive ou nulle sur cet intervalle, alors elle est croissante au sens large sur cet intervalle et que l'image d'un intervalle est un intervalle.

Interprétation géométrique de la dérivée.

Application à l'étude et à la représentation graphique de quelques fonctions simples (uniquement sur des exemples numériques).

Fonction $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(On ne demandera pas aux candidats au baccalauréat de démontrer directement la continuité d'une fonction, ou de chercher directement une limite ; on se bornera à utiliser les théorèmes généraux, énoncés sans démonstration, à propos des limites des sommes, produits, quotients de fonctions).

II.1. Exemples, tirés des sciences humaines et naturelles, de fonctions dont l'accroissement sur tout intervalle $[x, x + \ell]$, pour un ℓ donné, est proportionnel à la valeur de la fonction au point x.

2. Etude des suites $n \longmapsto f(n)$ telles que $f(n + 1) - f(n) = k\, f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, calcul de $f(n)$, monotonie de f ; limite de f lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On admettra l'existence, pour tout a réel strictement positif, d'une unique fonction continue et dérivable f_a définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple de nombres réels (x, y) on ait $f_a(x + y) = f_a(x)\, f_a(y)$ et $f_a(1) = a$. Calcul de $f_a(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Q}$. (On pourra admettre l'existence d'une racine $n^{\text{ième}}$ pour tout nombre réel positif et tout entier positif n).

Calcul de $f'_a(x)$ en fonction de $f'_a(0)$.

Notation a^x (fonction exponentielle de base a), propriétés des exposants : $(a^b)^c = a^{bc}$, $(ab)^c = a^c b^c$. Signe et monotonie de f_a, limite de f_a pour x tendant vers $\pm\infty$.

4. Nombre e. Notations $\exp x$ et e^x. La fonction $x \longmapsto \exp x$ sera caractérisée parmi les fonctions exponentielles par le fait que sa dérivée vaut 1 pour $x = 0$.

Équations différentielles $y' = ky$.

5. Fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto a^x$. Notation Log a. Logarithmes décimaux et népériens, notations Log ou ln ; formule $a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$. Usage des tables et de la règle à calcul.

6. Représentation graphique des fonctions exponentielles et logarithmes.

7. Etude des fonctions $x \longmapsto \dfrac{a^x}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. On énoncera le résultat concernant la limite de ces fonctions pour x tendant vers $+\infty$. (Toute démonstration est en dehors du programme).

Application aux fonctions logarithmes.

PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

Calcul des probabilités

Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. Exemples (dés pipés ou non, cartes, urnes, ...).

Variable aléatoire numérique ; événements liés à une variable aléatoire X (par exemple, parties de Ω telles que $X(\omega) = a$, ou $X(\omega) < a$ pour a donné) ; densité discrète ; fonction de répartition, croissance ; espérance mathématique (ou valeur moyenne) et variance d'une variation aléatoire.

Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. Evénements indépendants. Produits d'espaces probabilisés finis ; exemples.

SECTION B

« Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple, il est loisible de permuter les I.1 et 2 (notions de continuité et de limite) etc... ».

I. — Étude des fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Notion de continuité (en un point, sur un intervalle).

Définitions, éclairées par de nombreux exemples et contre-exemples. Énoncé des propriétés des fonctions continues (on admettra les théorèmes concernant la somme, le produit, le quotient de telles fonctions ; on admettra que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).

Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Exemples.

2. Notion de limite.

Définitions, éclairées par de nombreux exemples et contre-exemples. On montrera l'unicité de la limite, et on admettra les théorèmes concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Cas particulier des suites.

3. Notion de dérivée.

Révision du programme de 1re B.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables ; de la fonction réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone.

On admettra que si une fonction numérique admet une dérivée positive ou nulle sur un intervalle, elle est croissante (au sens large) sur cet intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée. Exemples de représentation graphique de fonctions dérivables par intervalles (on évitera les exemples présentant des difficultés techniques).

II. — Calcul intégral.

1. Somme de Riemann d'une fonction numérique f d'une variable réelle définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On admettra que si f est continue, ou monotone par morceaux, il existe un unique nombre réel $\int_a^b f(t)\, dt$ que les sommes de Riemann approchent arbitrairement lorsque la longueur du plus grand intervalle de subdivision est suffisamment petite.

2. Propriétés de linéarité de l'intégrale d'une fonction continue ou monotone par morceaux, sur un intervalle fermé borné. Moyenne d'une telle fonction. Lien avec la dérivation si la fonction est continue. Primitive d'une fonction continue, ensemble des primitives ; égalité

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, f étant continue sur $[a, b]$ et admettant F pour primitive.

Calcul dans des cas simples, de primitives : intégration par parties.

3. On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire).

Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $a \leqslant x \leqslant b$ $\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$, f étant une fonction positive, monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.

Extensions à $b < a$ et à une fonction négative.

III. — Fonctions élémentaires.

Il sera opportun de répartir les différentes rubriques de ce chapitre entre plusieurs moments de l'année, de manière à les étudier en liaison avec les titres I et II.

1. Fonctions $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$; dérivées, primitives, représentation graphique.

2. Fonctions $x \longmapsto x^r$ $(x > 0,\ r \in \mathbb{Q})$; dérivées, primitives.

3. Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4. Fonctions circulaires (révision) : dérivées et primitives de $x \longmapsto \cos(ax + b)$ et $x \longmapsto \sin(ax + b)$.

5. Logarithme népérien (notation Log)

$$\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini, de Log x et $\frac{\text{Log}\, x}{x}$.
Limite, quand x tend vers 0, de x Log x. Représentation graphique.

6. Fonction exponentielle (notation exp).

Propriétés ; dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

7. Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.

Relations entre les fonctions exponentielles et logarithmiques de base a, et celles de base e.

IV. — Statistique et Probabilités.

Révision du programme de Première B.

SECTION D

a) Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés, en mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple il est loisible de donner, en I.3, une autre introduction des nombres complexes, de permuter II.1 et 2 (notions de continuité et de limite) etc...

c) Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel rencontrées.

I. — Nombres réels ; calcul numérique ; nombres complexes.

1. Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision) ; toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant ; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2. Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme). Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. IV.8).

3. L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Notation $a + bi$; nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; module d'un nombre complexe.

4. Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première) ; forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : $r(\cos x + i \sin x)$ avec $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$; argument d'un tel nombre (classe des nombres x ou, par abus de langage, l'un d'eux).

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ $(x \in \mathbb{R},\ n = 2, 3, 4)$, et linéarisation des polynômes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe $(n \leqslant 4)$.

5. Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes ; calcul des parties réelles et imaginaires des racines ; cas des coefficients réels.

II. — Calcul différentiel.

1. Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité. Continuité « en un point » ; continuité sur un intervalle ; somme, produit, quotient de fonctions continues ; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue sur un intervalle, l'image, par la fonction, de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque ; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2. Fonctions numériques d'une variable réelle : limites.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3. Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation. Révision du programme de 1re D : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; notation différentielle : dérivée en ce point.

Fonction dérivée ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente.

Définition des dérivées successives.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle. Etude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée. Représentation graphique.

4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point ; limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point ; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée ; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables.

Application à la recherche de tangentes. Exemples.

5. Cinématique du point.

Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.

Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère.

Etude des mouvements circulaires (vitesse angulaire) ; étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

III. — Calcul intégral.

1. Définition des sommes de Riemann d'une fonction numérique d'une variable réelle sur un intervalle fermé, borné. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone ; notation $\int_a^b f(t)\,dt$; premières propriétés. On admettra que ces propriétés s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux.

Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé, borné.

Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue.

Primitives ; ensemble des primitives ; égalité

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

f étant continue sur $[a, b]$ et admettant F pour primitive.

Calcul de primitives ; intégration par parties.

2. On énoncera sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire...).

Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de $R \times R$ définie par :

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$

f étant une fonction positive, monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.

Extensions à $b < a$ et à une fonction négative.

3*. Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc... (calcul de volumes, masses, moments d'inertie ; vitesse et distance parcourue ; intensité et quantité d'électricité : puissance et énergie, etc...).

Valeur efficace d'un phénomène périodique.

IV. — Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves pourront illustrer les chapitres précédents ; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1. Fonction $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; dérivée ; primitive.

2. Fonction $x \to x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$: $x > 0$) dérivée ; primitive.

3. Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4. Fonctions circulaires ; dérivées (révision) ; dérivés et primitives de $x \longmapsto \cos(ax + b)$ et $x \longmapsto \sin(ax + b)$.

5. Logarithme népérien (notation Log)

$$\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Limite, quand la variation positive x tend vers l'infini de Log x et $\frac{\text{Log}\, x}{x}$.

Limite de x Log x quand x tend vers 0. Représentation graphique.

6. Fonction exponentielle (notation exp).

Propriétés ; dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

7. Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.

Relations entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \to e^{i\omega x}$.

Remarque : L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8. Calcul numérique.

Usage de la règle à calcul ;

Usage de tables ; pratique de l'interpolation linéaire. Tables de logarithmes ;

Usage de machines à calculer de bureau.

9*. Equations différentielles.

Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :

$y' = a\,y$, a étant une constante réelle,

$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

V. — Éléments d'algèbre linéaire.

1. Géométrie vectorielle :

a) révision du titre IV de la classe de 1re D.

b) on admettra que l'espace euclidien réel est orientable, produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace euclidien orienté de dimension 3.

2. Barycentre dans un espace affine. Repère affine.

Réduction dans le cas euclidien de

$$f(M) = a\text{MA}^2 + b\text{MB}^2 + c\text{MC}^2.$$

3. Interprétation géométrique d'une application $z \longmapsto az + b$ (a, b complexes, $a \neq 0$, après identification du plan au corps des nombres complexes, grâce au choix d'un repère orthonormé ; groupe des similitudes directes du plan.

VI. — Probabilités sur un ensemble fini ; statistique.

1. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image ; fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couples de variables aléatoires réelles, loi du couple. Lois marginales. Couple indépendant. Système de n variables aléatoires indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Espérance mathématique de la somme de deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Epreuves répétées, loi faible des grands nombres.

4. Description statistique d'une population ou d'un échantillon (révision du programme de statistique de 1re D, titre VII-1° ; exercices pratiques sur ce programme : calcul de coefficients de corrélation observés.

TERMINALE C et E (PRÉAMBULE)

a) Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés, en mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

SECTION C

b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple il est loisible de permuter au I.3 les trois alinéas concernant les nombres entiers, les III.1 et 2 (notions de continuité et de limite), de donner, en II.3, une autre introduction des nombres complexes, etc...

SECTION E

b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple, il est loisible de donner, en II.3 une autre introduction des nombres complexes, de permuter III.1 et 2 (notions de continuité et de limite) etc.

c) Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes, homomorphismes (noyau) automorphismes rencontrés.

SECTION C

I. — Nombres entiers naturels arithmétiques.

1*. Enoncé des propriétés attribuées à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Raisonnement par récurrence. Applications de $\mathbb{N}$ dans un ensemble X ; notation indicielle ; exemples.

2. Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ; multiples d'un entier relatif : notation $n\mathbb{Z}$. Congruences modulo n ; l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{N}$. Principe des systèmes de numération ; base ; numérations décimale et binaire.

3. *a*) Nombres premiers dans $\mathbb{Z}$; si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

b) Décomposition d'un nombre en facteurs premiers ; existence, unicité.

c) Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple ; nombres premiers entre eux ; identité de Bezout. (L'ordre de *a*), *b*), *c*) est, bien entendu, laissé au choix du professeur).

SECTION E

I. — Nombres entiers naturels arithmétiques.

Exemples de raisonnement par récurrence.

Exemples d'emploi de la notation indicielle.

Principe des systèmes de numération ; base ; numération décimale et binaire.

SECTION C et E

II. — Nombres réels. Calcul numérique. Nombres complexes

1. Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision) ; toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant ; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2. Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme).

Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. V.8).

3. L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Notation $a + bi$; nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; module d'un nombre complexe.

4. Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première) ; forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : $r(\cos x + i \sin x)$ avec $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$; argument d'un tel nombre (classe des nombres x ou, par abus de langage, l'un d'eux).

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, 4$), et linéarisation des polynômes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

5. Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes ; calcul des parties réelles et imaginaires des racines ; cas des coefficients réels.

III. — Calcul différentiel.

1. Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité. Continuité « en un point » ; continuité sur un intervalle ; somme, produit, quotient, de fonctions continues ; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue sur un intervalle, l'image, par la fonction de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque ; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2. Fonctions numériques d'une variable réelle : limites. Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.
Cas particulier des suites.
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3. Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation. Révision du programme de Première : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; notation différentielle : dérivée en ce point. Fonction dérivée ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente. Définition des dérivées successives.
Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.
Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.
On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle elle est croissante au sens large sur cet intervalle.
Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle.
Etude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.
Représentation graphique ; exercices simples de recherches d'asymptotes.

4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle.
Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
Continuité en un point ; limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.
Dérivée en un point ; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée ; fonction dérivée.
Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.
Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables.
Application à la recherche de tangentes ; exemples des coniques et des hélices circulaires.

5. Cinématique du point.
Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.
Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.
Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère. Etude des mouvements circulaires (vitesse angulaire) ; étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

IV. — Calcul intégral.

1. Définition des sommes de Riemann d'une fonction numérique d'une variable réelle sur un intervalle fermé, borné. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone ; notation $\int_a^b f(t)\,dt$; premières propriétés. On admettra que ces propriétés s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux.
Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé, borné.
Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue.
Primitives ; ensemble des primitives ; égalité

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

f étant continue sur $[a, b]$ et admettant F pour primitive.
Calcul de primitives ; intégration par parties.

2. On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire...). Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$

f étant une fonction positive, monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.
Extensions à $b < a$ et à une fonction négative.

SECTION C et E

3*. Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc... (calcul de volumes, masses, moments d'inertie ; vitesse et distance parcourue ; intensité et quantité d'électricité ; puissance et énergie, etc...).
Valeur efficace d'un phénomène périodique.

V. — Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves pourront illustrer les chapitres précédents ; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1. Fonction $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; dérivée ; primitives.
2. Fonction $x \longmapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$; $x > 0$) dérivée ; primitives.
3. Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.
4. Fonctions circulaires ; dérivées (révision) ; dérivées et primitives de $x \longmapsto \cos(ax + b)$ et $x \longmapsto \sin(ax + b)$.
5. Logarithme népérien (notation Log et ln)

$$\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de Log x et $\frac{\text{Log}\, x}{x}$. Limite de x Log x quand x tend vers 0.
Représentation graphique.

6. Fonction exponentielle (notation exp).
Propriétés ; dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

7. Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.
Relations entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

SECTION C

Définition de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$;
dérivée de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$.

SECTION C et E

* Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{i\omega x}$.
Remarque : L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

SECTION C

8. Calcul numérique.
Usage de la règle à calcul ; Usage des tables ; pratique de l'interpolation linéaire. Tables de logarithmes.
Usage de machines à calculer de bureau.

SECTION E

8. Calcul numérique.
Révision des programmes de Seconde T et Première E.

SECTION C et E

9*. Equations différentielles.
Recherche des fonctions numériques une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :
$y' = a\,y$, a étant une constante réelle
$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

SECTION C et E

VI. — Éléments de géométrie affine et euclidienne.

N.B. : Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{R}$ et la dimension n est toujours égale à 2 ou 3. Une « *transformation d'un ensemble* E » est une bijection de E sur lui-même : une application f de E dans lui-même est une *involution* si f ∘ f est l'identité : c'est une transformation de E.

1. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ; image et noyau. Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

2. Barycentre dans un espace affine. Variété affine. Repère affine.
Réduction dans le cas euclidien de

$$f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

3. Application affine d'un espace affine E dans lui-même, application linéaire associée. Exemples : projection parallèle sur un sous-espace affine ; involutions affines, leurs points fixes ; translations et homothéties.

4. Applications linéaires d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même conservant la norme ; transformations orthogonales (isométries vectorielles), groupe orthogonal.

Dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension 3, éléments fixes des transformations orthogonales involutives (symétries). Orientation du plan vectoriel euclidien (rappel de la classe de Première).

Étude des rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 (par définition, une telle rotation est, soit l'identité, soit une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle) ; groupe des rotations vectorielles : orientation de l'espace.

Produit vectoriel, dans l'espace vectoriel euclidien, orienté de dimension 3.

5. Définition d'une isométrie de l'espace affine euclidien. Toute isométrie est une bijection affine. Groupe des isométries ; sous-groupe des déplacements.

Dans le plan affine euclidien, symétries, translations, rotations ; tout déplacement est de l'un de ces deux derniers types.

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, symétries, translations, rotations, vissages : on admettra que tout déplacement est de l'un de ces trois derniers types.

Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

VII. — Compléments de géométrie euclidienne plane.

1. Angle d'un couple de demi-droites vectorielles (rappel de 1re).

Groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites.

Angle d'un couple de droites vectorielles (ensemble des deux rotations vectorielles transformant la première en la seconde).

Groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites.

Homomorphisme canonique $\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}'$; son noyau.

Isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$ déduit de l'homomorphisme $\alpha \longmapsto \alpha + \alpha$ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$.

Condition, en terme d'angles de droites, pour que quatre points soient cocycliques.

2. Similitudes planes (c'est-à-dire applications du plan dans lui-même conservant les rapports de distance). Représentation par les formules $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ lorsque l'on a identifié le plan à $\mathbb{C}$ grâce au choix d'un repère orthonormé.

Points fixes des similitudes. Groupe des similitudes du plan et sous-groupes remarquables.

SECTION C

3. Etude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad (|a| + |b| \neq 0).$$

Différentes formes de ces courbes ; existences d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes ; équations réduites ; existence de la tangente. Ellipse, hyperbole, parabole définies par les propriétés de leurs points qui font intervenir les foyers et directrices (les propriétés des tangentes aux coniques sont hors du programme). Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

SECTION E

3. Etude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \; (|a| + |b| \neq 0).$$

Différentes formes de ces courbes ; existence d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes. Equations réduites : ellipse, hyperbole, parabole.

Existence de la tangente. Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

4. Géométrie descriptive. Les questions énumérées ci-dessous seront avantageusement étudiées en liaison avec le cours de géométrie de cette classe et de la classe antérieure ; elles serviront utilement à son illustration.

Rotation autour d'un axe vertical, ou de bout.

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal ou frontal.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; angle de deux droites.

Projection d'un cercle : épure.

Représentation d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution dont une base circulaire est dans le plan horizontal de projection.

Construction par points et tangentes de la projection horizontale (resp. frontale) de l'intersection d'une telle surface par un plan de bout (resp. vertical).

Représentation de l'hélice circulaire droite tracée sur un cylindre de révolution d'axe vertical.

SECTION C et E

VIII. — Probabilités sur un ensemble fini.

1. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi du couple. Lois marginales.

Couple indépendant. Système de n variables aléatoires indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Espérance mathématique de la somme des 2 variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Épreuves répétées ; loi faible des grands nombres.

ALPHABET GREC

Α	α	alpha	a
Β	β, ϐ	bêta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	epsilon	e
Ζ	ζ	dzéta	dz
Η	η	êta	e
Θ	θ	thêta	t (aspiré)
Ι	ι	iota	i
Κ	κ	kappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	mu	m
Ν	ν	nu	n
Ξ	ξ	ksi	ks
Ο	ο	omicron	o
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	rô	r
Σ	σ, ς	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	upsilon	u
Φ	φ	phi	p (aspiré)
Χ	χ	khi	k (aspiré)
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	oméga	o

1 NOMBRES RÉELS

1.1 PROPRIÉTÉS DE L'ENSEMBLE $\mathbb{R}$

1.1.1 Corps commutatif totalement ordonné.

1 Rappelons qu'un ensemble K, muni de deux opérations notées par les signes usuels + (addition) et × (multiplication) est appelé un **corps commutatif** s'il est déjà un anneau commutatif unitaire pour ces lois, et si chaque élément non nul admet un inverse pour la multiplication :

$$\left.\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a(bc) &= (ab)c \end{aligned}\right\} \textbf{associativités}$$

$$\left.\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac \\ (a + b)c &= ac + bc \end{aligned}\right\} \textbf{distributivités}$$

$$\left.\begin{aligned} a + b &= b + a \\ ab &= ba \end{aligned}\right\} \textbf{commutativités}$$

$$\left.\begin{aligned} a + 0 &= 0 + a = a \\ a \times 1 &= 1 \times a = a \end{aligned}\right\} \textbf{éléments neutres}$$

$$\left.\begin{aligned} a + (-a) &= (-a) + a = 0 \\ (a \neq 0) \quad aa^{-1} &= a^{-1}a = 1 \end{aligned}\right\} \textbf{éléments symétriques}$$

2 Un tel corps commutatif est **totalement ordonné** si l'on peut définir, sur l'ensemble K, une relation d'ordre total, compatible avec l'addition et avec la multiplication par un élément positif (c'est-à-dire supérieur ou égal à 0) :

$$\left.\begin{aligned} & a \geqslant a \\ & (a \geqslant b \text{ et } b \geqslant c) \implies (a \geqslant c) \\ & (a \geqslant b \text{ et } b \geqslant a) \implies (a = b) \\ & a \ngeqslant b \implies b \geqslant a \end{aligned}\right\} \textbf{ordre total}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\boldsymbol{a \geqslant b}) \implies (\boldsymbol{a + c \geqslant b + c}) \\ (\boldsymbol{a \geqslant b} \text{ et } \boldsymbol{c \geqslant 0}) \implies (\boldsymbol{ac \geqslant bc}) \end{array}} \quad \left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\}\textbf{compatibilités}$$

3 Nous admettrons l'existence de tels corps. Étudions quelques conséquences des définitions ci-dessus, en utilisant librement les symboles $\leqslant$, $>$ et $<$ définis par les relations immédiates :

$$\begin{array}{lcl} (a \leqslant b) & \Longleftrightarrow & (b \geqslant a); \\ (a > b) & \Longleftrightarrow & (a \geqslant b \text{ et } a \neq b); \\ (a < b) & \Longleftrightarrow & (b > a). \end{array}$$

■ $$\boxed{(\boldsymbol{a + c \geqslant b + c}) \implies (\boldsymbol{a \geqslant b})} \qquad (3)$$

En effet, il suffit d'appliquer l'implication (1) :

$$(a + c \geqslant b + c) \implies (a + c + [-c] \geqslant b + c + [-c]).$$

■ $$\boxed{(\boldsymbol{a \geqslant b}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{a + c \geqslant b + c})} \qquad (4)$$

C'est la conséquence des relations (1) et (3).

■ $$\boxed{(\boldsymbol{a > b}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{a + c > b + c})} \qquad (5)$$

Il suffit de remarquer que les égalités $a = b$ et $a + c = b + c$ sont équivalentes et d'appliquer l'équivalence (4).

■ $$\boxed{(\boldsymbol{a > 0}) \implies (\boldsymbol{-a < 0})} \qquad (6)$$

En effet, on peut écrire :

$$(a > 0) \implies (a + [-a] > 0 + [-a]).$$

■ $$\boxed{(\boldsymbol{a < 0}) \implies (\boldsymbol{-a > 0})} \qquad (7)$$

Ceci résulte de l'implication :

$$(0 > a) \implies (0 + [-a] > a + [-a]).$$

■ $$\boxed{(a > 0) \iff (-a < 0)} \tag{8}$$

C'est une conséquence immédiate des relations (6) et (7), et de l'égalité $a = -(-a)$.

■ $$\boxed{a^2 \geqslant 0} \tag{9}$$

Si a est positif ou nul, alors, d'après la relation (2) :

$$a \geqslant 0 \implies a^2 = aa \geqslant a0.$$

Or, $a0$ est nul puisque :

$$a0 + a0 = a(0 + 0) = a0.$$

Si a est négatif ou nul, on écrit de même :

$$-a \geqslant 0 \implies a^2 = (-a)(-a) \geqslant (-a)0 = 0.$$

Ceci prouve que l'équation $x^2 = k$ n'a pas de racines si k est strictement négatif.

■ $$\boxed{1 > 0} \tag{10}$$

En effet : $1 = 1 \times 1 = 1^2 \neq 0.$

■ $$\boxed{(a > 0) \implies (a^{-1} > 0)} \tag{11}$$

Si l'on avait : $a^{-1} \leqslant 0$, on pourrait alors en déduire l'inégalité : $aa^{-1} \leqslant a0$, c'est-à-dire :

$$1 \leqslant 0,$$

ce qui est faux.

■ $$\boxed{(a < 0) \implies (a^{-1} < 0)} \tag{12}$$

Si l'on avait : $a^{-1} \geqslant 0$, on pourrait alors en déduire l'inégalité : $aa^{-1} \leqslant 0a^{-1}$, c'est-à-dire :

$$1 \leqslant 0.$$

■ $$\boxed{(a > 0) \iff (a^{-1} > 0)} \qquad (13)$$

C'est une conséquence immédiate des relations (11) et (12), et de l'égalité $a = (a^{-1})^{-1}$.

■ $$\boxed{(a > b \ \text{ et } \ c > 0) \implies (ac > bc)} \qquad (14)$$

On a facilement : $ac \geqslant bc$. Si l'égalité était vérifiée, en multipliant par c^{-1} qui est positif (11), on trouverait l'égalité $a = b$, qui est fausse.

■ $$\boxed{(ac > bc \ \text{ et } \ c > 0) \implies (a > b)} \qquad (15)$$

Ceci n'est autre que la relation (14) si l'on tient compte de l'équivalence :

$$c > 0 \iff c^{-1} > 0.$$

4 Signalons encore les **règles des signes** :

$$\boxed{\begin{array}{lll} (a \geqslant 0 \ \text{ et } \ b \geqslant 0) & \implies & (a + b \geqslant 0) \\ (a \leqslant 0 \ \text{ et } \ b \leqslant 0) & \implies & (a + b \leqslant 0) \\ (a \geqslant 0 \ \text{ et } \ b > 0) & \implies & (a + b > 0) \\ (a \leqslant 0 \ \text{ et } \ b < 0) & \implies & (a + b < 0) \\ (a \geqslant 0 \ \text{ et } \ b \geqslant 0) & \implies & (ab \geqslant 0) \\ (a \leqslant 0 \ \text{ et } \ b \geqslant 0) & \implies & (ab \leqslant 0) \\ (a \leqslant 0 \ \text{ et } \ b \leqslant 0) & \implies & (ab \geqslant 0) \\ (a > 0 \ \text{ et } \ b > 0) & \implies & (ab > 0) \\ (a < 0 \ \text{ et } \ b > 0) & \implies & (ab < 0) \\ (a < 0 \ \text{ et } \ b < 0) & \implies & (ab > 0) \end{array}} \qquad \begin{array}{l} (16) \\ (17) \\ (18) \\ (19) \\ (20) \\ (21) \\ (22) \\ (23) \\ (24) \\ (25) \end{array}$$

Ce sont des conséquences immédiates des relations (1), (2), (8), (13) et de la transitivité de la relation d'ordre. Par exemple :

$$(a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b \geqslant 0) \implies (a + b \geqslant b \quad \text{et} \quad b \geqslant 0);$$

d'où la relation (16).

L'hypothèse ($a \geqslant 0$ et $b > 0$) implique donc bien :

$$a + b \geqslant 0,$$

et l'égalité $a + b = 0$ est rendue impossible par la relation (8), etc. De même, pour les implications concernant le produit, si l'on remarque la propriété fondamentale :

$$(ab = 0) \implies (a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0).$$

5 Enfin, un corps commutatif totalement ordonné K contient un sous-ensemble isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

comme on le voit en associant l'entier 0 et l'élément neutre de l'addition, l'entier 1 et l'élément neutre de la multiplication, l'entier n et l'élément du corps obtenu en additionnant n éléments égaux à 1, l'entier $(-n)$ et l'opposé de l'élément associé à n; on peut montrer facilement l'inégalité : $n > 0$, puis l'inégalité : $0 > -n$, en déduire une bijection entre $\mathbb{Z}$ et une partie du corps K, puis vérifier que cette bijection respecte l'addition, la multiplication et la relation d'ordre usuelles de $\mathbb{Z}$. (Un corps commutatif totalement ordonné est donc infini.) Nous écrirons, par abus de langage :

$$\mathbb{Z} \subset \mathrm{K}.$$

1.1.2 Corps des nombres réels.

Nous admettrons l'existence d'un corps, noté $(\mathbb{R}, +, \times)$ (ou, plus brièvement, $\mathbb{R}$), appelé corps des **nombres réels**, déjà utilisé dans les classes antérieures, et défini par les axiomes suivants.

DÉFINITION / 1 **On appelle *nombre réel* tout élément d'un ensemble $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :**

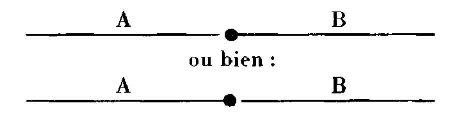
A1 $\mathbb{R}$ peut recevoir la structure de corps commutatif totalement ordonné.

A2 Toute égalité de la forme $\mathbb{R} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, où A et B sont des parties non vides telles que tout élément de A soit strictement inférieur à tous les éléments de B, implique l'existence d'un nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de A et inférieur ou égal à tous les éléments de B.

Tous les corps commutatifs totalement ordonnés ne satisfont pas à l'axiome **A2**; on peut montrer que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels peut s'écrire sous la forme demandée (prendre pour A l'ensemble des rationnels r tels que : $r < 0$ ou : $r^2 < 2$) bien qu'il n'existe aucun rationnel séparant A de son complémentaire B.
Nous admettrons que les propriétés **A1** et **A2** définissent bien un corps, et qu'il est **unique**, à un isomorphisme près.

REMARQUES. — 1 Le couple (A, B) de l'axiome **A2** s'appelle une **coupure**; A et B sont évidemment disjointes, donc complémentaires. Le réel défini par l'axiome appartient à l'un, et à l'un seulement, des deux sous-ensembles. Il est évidemment unique.

2 Ces axiomes ne sont pas arbitraires : ils sont justifiés par le modèle géométrique qui a servi, historiquement, à élucider la notion de nombre réel. L'axiome **A1** n'est autre qu'un résumé de propriétés très simples, valables par exemple pour les nombres rationnels, que l'on désire garder même lorsque ceux-ci deviennent insuffisants (par exemple, en géométrie, si l'on désire pouvoir parler des longueurs du côté d'un carré et de sa diagonale); l'axiome **A2**, qui ne concerne que la relation d'ordre, est rendu très intuitif si l'on considère les réels comme les abscisses des points d'une droite affine usuelle; le terme de coupure évoque bien la partition de celle-ci en deux demi-droites de nature différente :



Il existe, évidemment, de nombreuses autres axiomatiques équivalentes de $\mathbb{R}$, et des constructions explicites de ce corps, à partir de la théorie des ensembles.

1.1.3 Bornes supérieures et inférieures.

1 Rappelons quelques définitions simples liées à l'ordre dans un ensemble.

DÉFINITION / 2 **Un *majorant* (resp. *majorant strict, minorant, minorant strict*) d'un sous-ensemble non vide A d'un ensemble ordonné E est un élément supérieur ou égal (resp. strictement supérieur, inférieur ou égal, strictement inférieur) à tous les éléments de A.**

Un élément de A est un *élément minimum*, noté *min A* (resp. *maximum*, noté *max A*) s'il est un minorant (resp. majorant) de A.

Le sous-ensemble A est *majoré* (resp. *minoré*) s'il admet au moins un majorant (resp. minorant).

Nous allons compléter ces définitions, bien connues, par une nouvelle notion plus délicate : celle de *borne supérieure* (ou *inférieure*) d'un sous-ensemble.

DÉFINITION / 3 **Un élément d'un ensemble ordonné E est une *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) d'un sous-ensemble non vide A s'il est majorant de A et inférieur ou égal à tous les autres majorants (resp. minorant de A et supérieur ou égal à tous les autres minorants). On le note :**

$sup\ A$ (resp. $inf\ A$).

2 Signalons quelques propriétés très simples des majorants, maximum et borne supérieure d'une partie A :

a) si m est un majorant de A, tout élément supérieur ou égal à m est également un majorant;

b) une borne supérieure, si elle existe, est nécessairement unique, ce qui justifie la notation *sup* A et l'expression « *la* borne supérieure de A »;

c) un maximum, s'il existe, est une borne supérieure de A; il est alors unique, d'où la notation *max* A et l'expression « *le* maximum de A ».

La partie de $\mathbb{R}$ constituée par les entiers relatifs de $\mathbb{Z}$ n'admet ni majorant, ni minorant. Les nombres rationnels tels que : $r^2 < 2$ forment une partie de $\mathbb{R}$ majorée et minorée; les nombres $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de cette partie; ce ne sont pas des maximums ou minimums, car ils ne lui appartiennent pas. Le même ensemble, considéré cette fois-ci comme partie du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, y est encore majoré et minoré, mais n'y admet plus de borne supérieure ou inférieure.

Notons que, dans un corps commutatif totalement ordonné, l'ensemble des majorants d'une partie A ne peut être le corps tout entier comme le montre l'inégalité : $a - 1 < a$ (équivalente à : $a < a + 1$, donc à : $0 < 1$).

3 Considérons une partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée; l'ensemble M, formé de tous les majorants de A, et l'ensemble M′, complémentaire de M dans $\mathbb{R}$, ne sont donc pas vides. Ils forment une coupure de $\mathbb{R}$ puisque tout élément de M′ est strictement inférieur à tous les majorants de A qui constituent l'ensemble M.

Soit a le nombre réel défini par cette coupure. Il est inférieur ou égal à tous les majorants de A. Supposons qu'il appartienne à M'; puisque ce n'est pas un majorant de A, il existe un élément x de A qui lui est strictement supérieur :

$$a < x.$$

On en déduit facilement les inégalités :

$$2a < a + x < 2x,$$

puis :

$$a < \frac{a+x}{2} < x \qquad (2 = 1 + 1 > 0).$$

Le nombre $y = \dfrac{a+x}{2}$ n'est pas un majorant de A puisqu'il est inférieur à x; y appartient donc à M' et, par suite, doit être inférieur ou égal à a d'après l'axiome **A2.** Comme ceci est inexact, l'hypothèse de départ est absurde et a n'appartient pas à M', ce qui implique que a est un majorant de A, donc la borne supérieure de A.

THÉORÈME / 1 **Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) du corps $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).**

4 Nous avons défini la borne supérieure a de A comme **le plus petit des majorants** de A. On peut donner une autre définition de ce nombre. Il est clair que a est un majorant de A et que les nombres $(a - \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$, ne sont pas des majorants; d'où les implications :

$$(x \in A) \Rightarrow (x \leqslant a) \qquad (26)$$

$$(\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists_A y,\ a - \varepsilon < y) \qquad (27)$$

Réciproquement, ces deux implications caractérisent bien la borne supérieure de A.

EXEMPLE. *On considère la suite définie par les relations :*

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres u_n.

La suite étudiée est *décroissante*; en effet :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Pour $n = 0$, on a bien : $u_1 < u_0$.
Pour : $n \geqslant 1$, on peut alors écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2u_n}\left[2 - \left(\frac{u_{n-1}^2 + 2}{2u_{n-1}}\right)^2\right] = \frac{8u_{n-1}^2 - (u_{n-1}^2 + 2)^2}{8u_n u_{n-1}}$$

$$= \frac{4u_{n-1}^2 - u_{n-1}^4 - 4}{4(u_{n-1}^2 + 2)} = -\frac{1}{4}\frac{(u_{n-1}^2 - 2)^2}{u_{n-1}^2 + 2} \leqslant 0.$$

Par conséquent, $u_0 = 2$ est le maximum, et donc la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de u_n. Cet ensemble est minoré, puisque l'on a évidemment :

$$u_n > 0.$$

Le calcul précédent montre que :

$$2 - u_n^2 = -\frac{(u_{n-1}^2 - 2)^2}{4u_{n-1}} \leqslant 0;$$

d'où l'inégalité entre réels positifs :

$$u_n \geqslant \sqrt{2}$$

(nous supposons ici l'existence de ce nombre, déjà largement utilisé dans les classes antérieures).
$\sqrt{2}$ est donc un minorant. Montrons que c'est *le plus grand* des minorants, donc la borne inférieure. Démontrons pour cela, par récurrence, l'inégalité :

$$u_n^2 - 2 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Elle est vérifiée pour $n = 0$ puisque :

$$2 = u_0^2 - 2 = \frac{1}{2^{-1}}.$$

Si elle est vraie pour n, alors :

$$u_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4u_{n-1}}(u_n^2 - 2)^2.$$

$\dfrac{1}{4u_{n-1}}$ peut être majoré par $\dfrac{1}{4}$, et $(u_n^2 - 2)^2$ par $\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2$; d'où :

$$u_{n+1}^2 - 2 < \frac{1}{4}\frac{1}{4^{n-1}},$$

soit : $$u_{n+1}^2 - 2 < \frac{1}{4^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Cette inégalité, qui est donc démontrée par récurrence, prouve bien que $\sqrt{2}$ est le plus grand des minorants, car l'existence d'un minorant : $m > \sqrt{2}$ entraînerait, ***pour tout n***, l'inégalité :

$$2^n < \frac{1}{m^2 - 2}.$$

Les bornes cherchées sont donc 2 et $\sqrt{2}$.

1.1.4 Intervalles emboîtés et suites adjacentes.

1 Rappelons la notion d'**intervalle** d'un ensemble ordonné E.

DÉFINITION / 4 **Un sous-ensemble I d'un ensemble ordonné E est un *intervalle* de E s'il satisfait à l'implication :**

$$(x \in I \quad \text{et} \quad y \in I \quad \text{et} \quad x \leqslant z \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (z \in I).$$

Par définition, l'ensemble $[a, b]$ est formé des éléments x tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Cet ensemble est évidemment un intervalle. Dans $\mathbb{R}$, on parle d'**intervalle** fermé **borné** (ou, parfois, de **segment**); a et b sont les *bornes*.

Une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ est dite **emboîtée** si l'on a, pour tout entier n, les inégalités :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Cette notion est équivalente à l'inclusion :

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

2 Considérons une suite d'intervalles fermés bornés emboîtés, et appelons A l'ensemble des nombres a_n. Les inégalités évidentes :

$$a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$$

montrent que A est majoré (par tous les éléments b_n et, en particulier, par b_0).

Soit x la borne supérieure de A. Montrons que x est inférieure ou égale à tous les b_n. Si ce n'était pas le cas, il existerait un entier n tel que :

$$b_n < x.$$

Posant : $\varepsilon = x - b_n > 0$, nous savons qu'il existe un élément a_p de A tel que :

$$x - \varepsilon < a_p,$$

d'où : $$b_n < a_p.$$

Cette inégalité est visiblement fausse, que l'on ait : $p \leqslant n$ (d'où $a_p \leqslant a_n \leqslant b_n$), ou : $p \geqslant n$ (d'où $a_p \leqslant b_p \leqslant b_n$). On a donc, pour tout n :

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n,$$

et x appartient à tous les intervalles $[a_n, b_n]$.

THÉORÈME / 2 **Étant donné une suite d'intervalles fermés bornés emboîtés de nombres réels, il existe au moins un réel appartenant à chacun des intervalles.**

(On peut dire encore que l'**intersection** des intervalles n'est pas vide.)

3 Ce théorème n'est vrai que pour des intervalles fermés, car les intervalles ouverts :

$$]a, b[= \{x;\ a < x < b\}$$

n'y satisfont pas, comme le montre l'exemple :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

4 Les deux suites (a_n) et (b_n) sont, l'une croissante, l'autre décroissante. La différence $d_n = b_n - a_n$ est positive ou nulle, et définit une suite décroissante, puisque :

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant b_n - a_{n+1} \leqslant b_n - a_n.$$

Si, de plus, la différence d_n a pour limite 0 pour n infini (par exemple, si $d_n = \frac{1}{n}$ ou $d_n = \frac{1}{2^n}$), on dit que les deux suites sont **adjacentes**. Dans ces conditions, le nombre x défini précédemment est évidemment unique et chacune des deux suites admet x comme limite, comme le montrent les inégalités :

$$0 \leqslant x - a_n \leqslant b_n - a_n,$$
$$0 \leqslant b_n - x \leqslant b_n - a_n.$$

5 Nous ne déterminerons pas ici les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ (bien que ce soit assez facile). Il en existe dix :

a) les intervalles *fermés bornés* :

$$[a, b] = \{x;\ a \leqslant x \leqslant b\};$$

b) les intervalles ouverts bornés :

$$]a, b[= \{x;\ a < x < b\};$$

c) les intervalles semi-ouverts à droite :

$$[a, b[= \{x;\ a \leqslant x < b\};$$

d) les intervalles semi-ouverts à gauche :

$$]a, b] = \{x;\ a < x \leqslant b\};$$

e) les demi-droites fermées à droite :

$$]-\infty, b] = \{x;\ x \leqslant b\};$$

f) les demi-droites fermées à gauche :

$$[a, +\infty[= \{x;\ a \leqslant x\};$$

g) les demi-droites ouvertes à droite :

$$]-\infty, b[= \{x;\ x < b\};$$

h) les demi-droites ouvertes à gauche :

$$]a, +\infty[= \{x;\ a < x\};$$

i) l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même, noté $]-\infty, +\infty[$;

j) l'ensemble vide $\varnothing$ (que l'on pourrait noter $]a, a[$).

Il est parfois commode de compléter $\mathbb{R}$ par deux éléments, notés $-\infty$ et $+\infty$, pour obtenir un ensemble appelé **droite achevée** $\overline{\mathbb{R}}$. Ce n'est plus un corps, mais $\overline{\mathbb{R}}$ est encore un ensemble totalement ordonné si l'on pose les relations (où a est un réel) :

$$-\infty < a, \quad a < +\infty, \quad -\infty < +\infty.$$

Dans ces conditions, il n'existe plus que cinq types d'intervalles :

$$[a, b], \quad]a, b[, \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad \varnothing,$$

si l'on convient que a et b sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, non nécessairement dans $\mathbb{R}$.

1.1.5 Théorème d'Archimède.

Soit (a, b) un couple de réels tel que l'on ait : $a > 0$. Il est intuitif que l'on peut trouver un entier n satisfaisant à l'inégalité :

$$na > b.$$

Démontrons ce théorème par l'absurde. Si ce résultat était inexact, on pourrait considérer la borne supérieure c de l'ensemble A des nombres de la forme na (qui serait alors majoré par b), et l'inégalité, pour tout n : $\quad (n + 1)a \leqslant c.$

Prenons : $\varepsilon = a > 0$;

il existe un entier n tel que :

$$c - \varepsilon < na,$$

ou encore : $c < na + \varepsilon$,

c'est-à-dire :

$$c < (n + 1)a,$$

ce qui contredit un résultat antérieur.

On dit que $\mathbb{R}$ est un **corps archimédien.**

THÉORÈME / 3 **Pour tout réel b et tout réel strictement positif a, il existe un entier n tel que :**

$$\boldsymbol{na > b.}$$

Ce théorème, reconnu par **Archimède**, est encore vrai dans d'autres ensembles que $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ notamment. Il sert, par exemple, de base à la théorie de la division euclidienne.

Remarque. — On peut vérifier facilement que la démonstration des théorèmes **2** et **3** ne dépend que de l'axiome **A1** et du théorème **1**. Comme l'axiome **A2** peut se déduire de l'axiome **A1** et des théorèmes **2** et **3** (nous l'admettrons), il en résulte que l'on peut remplacer l'axiome **A2**, soit par le théorème **1**, soit par les théorèmes **2** et **3**, pour obtenir une axiomatique équivalente de $\mathbb{R}$.

1.1.6 Valeurs approchées d'un nombre réel.

Considérons un nombre réel x, un entier n, et l'ensemble A_n des entiers relatifs m tels que :

$$m \leqslant 10^n x.$$

Le théorème d'Archimède montre qu'il existe un entier p tel que :

$$10^n x < p.$$

p majore donc l'ensemble A_n. La borne supérieure de A_n est un nombre réel q_n; nous admettrons que c'est un entier, élément de A_n, donc le plus grand élément de A_n (un ensemble majoré d'entiers relatifs admet un maximum).

On peut en déduire les inégalités :

$$q_n \leqslant 10^n x < q_n + 1.$$

Le nombre réel, défini par :

$$a_n = \frac{q_n}{10^n},$$

est un rationnel appelé **valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.** (On précise parfois : valeur approchée **décimale.**)

De même, le rationnel :

$$b_n = \frac{q_n + 1}{10^n} = a_n + \frac{1}{10^n}$$

est appelé **valeur approchée par excès.**

Ces deux nombres satisfont aux inégalités :

$$a_n \leqslant x < b_n.$$

Par exemple, pour $x = \sqrt{2}$, $n = 3$, on trouve les rationnels :

$$a_3 = \frac{1\,414}{10^3}, \qquad b_3 = \frac{1\,415}{10^3},$$

puisque : $1\,414 < 1\,000\sqrt{2} < 1\,415,$

ou encore : $(1\,414)^2 < 2\,000\,000 < (1\,415)^2$

$[(1\,414)^2 = 1\,999\,396, \qquad (1\,415)^2 = 2\,002\,225].$

Les nombres a_n et b_n définissent deux suites, et une suite d'intervalles fermés bornés $[a_n, b_n]$ contenant tous x (en fait, on a même la relation :

$$x \in [a_n, b_n[).$$

La différence $d_n = b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ a pour limite 0 pour n infini.

La suite (a_n) est croissante.

En effet, l'inégalité :

$$10^n a_n \leqslant 10^n x$$

implique l'inégalité :

$$10^{n+1} a_n \leqslant 10^{n+1} x;$$

d'où : $10^{n+1} a_n \leqslant q_{n+1},$

et finalement :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \qquad (q_{n+1} = 10^{n+1} a_{n+1}).$$

Il est moins facile de démontrer que la suite (b_n) est décroissante. Les deux inégalités :

$$10^{n+1}a_{n+1} \leqslant 10^{n+1}x < 10^{n+1}b_n$$

ont pour conséquence l'inégalité :

$$10^{n+1}\left(b_{n+1} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) < 10^{n+1}b_n,$$

ou encore :

$$10^{n+1}(b_{n+1} - b_n) < 1.$$

Le premier membre étant un entier (il est égal à $q_{n+1} - 10q_n - 9$), cet entier est négatif ou nul; d'où :

$$b_{n+1} - b_n \leqslant 0.$$

Les deux suites (a_n) et (b_n) des valeurs approchées de x sont donc adjacentes, et x est le seul réel contenu dans tous les intervalles $[a_n, b_n]$. Comme b_n est lié très simplement à a_n, on voit que la suite (a_n) détermine entièrement x. Deux réels distincts ne peuvent avoir toutes leurs valeurs approchées par défaut égales entre elles (d'ailleurs x est la limite de la suite a_n).

THÉORÈME / 4 **Les valeurs approchées par défaut d'un nombre réel le déterminent entièrement. La suite des valeurs approchées par défaut et la suite des valeurs approchées par excès sont deux suites adjacentes.**

Le nombre 10 ne joue ici aucun rôle essentiel; on pourrait naturellement le remplacer par un entier quelconque supérieur ou égal à 2; il est lié à notre système familier de numération.

1.1.7 Corps des nombres rationnels.

Il existe un ensemble de corps $(K, +, \times)$ tels que K soit un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, contenant le nombre 1, contenant la somme, la différence et le produit de deux éléments de K ainsi que le quotient de deux nombres non nuls de K (par exemple, on peut prendre $K = \mathbb{R}$). Leur intersection — ensemble des nombres qui appartiennent à chacun d'eux — est évidemment encore un corps commutatif totalement ordonné. C'est le corps $\mathbb{Q}$ des **nombres rationnels**.

$\mathbb{Q}$ doit contenir les entiers de $\mathbb{R}$, comme $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, ainsi que leurs inverses $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$ et les produits de ces inverses par des entiers $\left(\text{par exemple } \frac{3}{4} \text{ et } -\frac{5}{6}\right)$; ces propriétés peuvent se démontrer facilement par récurrence. Or, l'ensemble de ces produits, appelés *fractions*, est évidemment un corps contenant le nombre 1 ; c'est donc le corps $\mathbb{Q}$ lui-même. Un nombre réel x est un rationnel si, et seulement si, il existe un entier n tel que le produit nx soit lui-même un entier relatif.

Considérons un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux réels x et y; x et y ne peuvent avoir mêmes valeurs approchées par défaut. Il existe donc un entier n tel que, par exemple, la valeur approchée par défaut de y à 10^{-n} près soit strictement supérieure à celle de x :

$$a_n \leqslant x < a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$c_n \leqslant y < c_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_n < c_n.$$

Les nombres $10^n a_n$ et $10^n c_n$ étant entiers, on a donc :

$$10^n a_n + 1 \leqslant 10^n c_n,$$

d'où les inégalités : $x < a_n + \frac{1}{10^n} \leqslant c_n \leqslant y.$

Le nombre rationnel c_n appartient donc à l'intervalle $]x, y]$ et, par conséquent, à l'intervalle I.

THÉORÈME / 5 **Tout intervalle réel contenant au moins deux nombres contient au moins un rationnel.**

(On peut en déduire que I contient une infinité de rationnels.) On traduit généralement le théorème **5** en disant que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

L'intervalle I contient également une infinité de nombres **irrationnels** (c'est-à-dire éléments du complémentaire $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). En effet, il contient au moins deux rationnels a et b, ainsi que le nombre :

$$c = \frac{a + b\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

qui est manifestement irrationnel et compris entre a et b.

1.1.8 Valeur absolue d'un nombre réel.

1 Considérons un nombre réel x et l'ensemble $A = \{x, -x\}$ (si x est nul, A ne possède qu'un seul élément). A est majoré, puisque l'on peut écrire :

$$(x \geqslant 0) \implies (-x \leqslant x).$$
$$(x \leqslant 0) \implies (x \leqslant -x).$$

Sa borne supérieure est l'un des deux réels x et $(-x)$. C'est donc un maximum. Nous poserons :

$$\boxed{|x| = \max\{x, -x\} = \sup\{x, -x\}} \qquad (28)$$

(On lit : **valeur absolue** de x, ou **module** de x.)

DÉFINITION / 5 **La valeur absolue du nombre réel x est le plus grand des nombres x et $-x$.**

Cette valeur absolue généralise la valeur absolue d'un entier relatif, qui est un entier naturel.

On peut en déduire immédiatement les relations suivantes :

$$|x| = |-x| \geqslant 0 \qquad (29)$$
$$|x| = 0 \iff x = 0 \qquad (30)$$
$$|x| = x \iff x \geqslant 0 \qquad (31)$$
$$|x| = -x \iff x \leqslant 0 \qquad (32)$$

2 $|x|$ est un élément de l'ensemble $\mathbb{R}^+$ qui est, par définition, l'ensemble des réels positifs ou nuls. Si x n'est pas nul, $|x|$ appartient à l'ensemble $\mathbb{R}^{*+}$ des réels strictement positifs, ensemble qui peut recevoir la structure de groupe multiplicatif d'après les relations :

$$(x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0) \implies (xy > 0), \qquad (23)$$
$$(x > 0) \implies (x^{-1} > 0). \qquad (11)$$

Considérons les égalités :

$$x(-y) = (-x)y = -xy \qquad (33)$$
$$(-x)(-y) = xy \qquad (34)$$

(L'égalité (33) est une simple conséquence des distributivités de la multiplication puisque :

$$0 = x0 = x(y + [-y]) = xy + x(-y),$$

et : $$0 = xy + [-xy].$$

L'égalité (34) s'en déduit aussitôt puisque :

$$xy = -(-xy).)$$

Ces deux égalités montrent que, dans tous les cas, on peut écrire :

$$\boxed{|xy| = |x|\,|y|} \tag{35}$$

L'application valeur absolue définit donc un homomorphisme du groupe multiplicatif ($\mathbb{R}^*$, $\times$) sur le groupe multiplicatif ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$). Le noyau de cet homomorphisme, ensemble des éléments dont l'image est l'élément neutre 1, est l'ensemble $\{1, -1\}$.

3 Étudions la valeur absolue d'une somme : $z = x + y$. Distinguons plusieurs cas.

a) Si x et y sont tous deux positifs ou nuls, alors :

$$x = |x|, \qquad y = |y|, \qquad z \geqslant 0;$$

d'où : $$|z| = z = |x| + |y|.$$

b) Si x et y sont tous deux négatifs ou nuls, alors :

$$x = -|x|, \qquad y = -|y|, \qquad z \leqslant 0;$$

d'où : $$|z| = -z = |x| + |y|.$$

c) Si x est positif et y négatif, alors :

$$x = |x|, \qquad y = -|y|, \qquad z = |x| - |y|.$$

On en déduit les inégalités :

$$z \leqslant |x| + |y|,$$

$$-z \leqslant |x| + |y|;$$

d'où : $$|z| \leqslant |x| + |y|.$$

d) Dans tous les cas :

$$\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|} \tag{36}$$

Cette inégalité est appelée **inégalité triangulaire de Minkowsky.**

4 Rassemblons les propriétés fondamentales de la valeur absolue que nous avons définie (on dit que $\mathbb{R}$ est un **corps valué**) :

$$|x| \geqslant 0 \tag{29}$$

$$|x| = 0 \iff x = 0 \tag{30}$$

$$|xy| = |x|\,|y| \tag{35}$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \tag{36}$$

On peut en déduire de nombreuses conséquences.
Par exemple :

$$|x - y| \leqslant |x| + |y| \tag{37}$$

En particulier, appliquons l'inégalité triangulaire à la somme :

$$x = (x + y) + (-y);$$

on obtient :

$$|x| \leqslant |x + y| + |-y|,$$

c'est-à-dire :

$$|x| - |y| \leqslant |x + y|.$$

On trouverait de même :

$$|y| - |x| \leqslant |x + y|;$$

d'où l'inégalité :

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \tag{38}$$

L'inégalité triangulaire est très importante. On peut montrer facilement que ce n'est une égalité que si et seulement si xy est positif ou nul.

5 Les éléments de $\mathbb{R}$ peuvent être considérés comme les points d'une droite affine, ou les vecteurs d'une droite vectorielle. On peut définir une **distance** entre deux nombres, ou deux points, par l'égalité :

$$d(x, y) = |y - x| \tag{39}$$

Cette distance possède quatre propriétés fondamentales :

$$\boldsymbol{d(x,y) \geqslant 0} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{d(x,y) = 0 \iff x = y} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{d(x,y) = d(y,x)} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)} \tag{43}$$

Les propriétés (40) et (41) ne sont que des traductions immédiates des relations (29) et (30).

La propriété (42) résulte de l'égalité :

$$x - y = -(y - x).$$

La propriété (43) résulte de l'inégalité triangulaire appliquée à la somme :

$$z - x = (y - x) + (z - y).$$

On dit que $\mathbb{R}$ est un **espace métrique**.

Si r est un nombre strictement positif, on appelle **boule ouverte** (resp. **fermée**) de centre a et de rayon r l'ensemble des nombres x tels que :

$$d(a,x) < r \qquad (\text{resp. } d(a,x) \leqslant r).$$

Cette boule ouverte (resp. fermée) n'est autre que l'intervalle borné ouvert $]a - r, a + r[$ (resp. fermé $[a - r, a + r]$). Ces notions sont utilisées dans l'étude des limites en analyse.

1.1.9 Congruences dans $\mathbb{R}$.

Considérons un nombre réel non nul ω. Nous allons définir sur $\mathbb{R}$ une relation binaire, notée par le signe $\equiv$, lue « x est **congru** à y **modulo** ω », par l'équivalence :

$$\boldsymbol{(x \equiv y\ [\omega]) \iff (\exists_{\mathbb{Z}} n,\ x - y = n\omega)}$$

($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.)

■ Cette relation de *congruence* possède les propriétés suivantes :

1 RÉFLEXIVITÉ :

$$(x . x = 0\omega) \implies (x \equiv x\ [\omega]).$$

2 TRANSITIVITÉ :

$$(x \equiv y\ [\omega] \quad \text{et} \quad y \equiv z\ [\omega] \implies (x \equiv z\ [\omega]).$$

En effet :

$$(x - y = n\omega \quad \text{et} \quad y - z = m\omega) \implies (x - z = [n + m]\omega).$$

3 SYMÉTRIE :

$$(x \equiv y\ [\omega]) \implies (y \equiv x\ [\omega]).$$

En effet :

$$(x - y = n\omega) \implies (y - x = (-n)\omega).$$

La relation de congruence est donc une relation d'équivalence.

L'ensemble $\dot{x}$ des nombres congrus à x n'est pas vide, car il est formé de tous les réels de la forme :

$$y = x + n\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

C'est la *classe de congruence* de x. Il contient notamment x lui-même.

EXEMPLE. Soit $\omega = 1$. La classe de congruence de 0 n'est autre que $\mathbb{Z}$; celle de $\frac{1}{3}$ est l'ensemble suivant :

$$\dot{x} = \left\{\dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots\right\}.$$

Donnons un autre exemple; si $\omega = 2\pi$, la classe de congruence de 0 est l'ensemble :

$$\dot{0} = \{\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots\}.$$

■ La congruence est *compatible* avec l'addition de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'on peut remplacer chacun des deux termes d'une somme par des nombres congrus sans modifier la classe du résultat. Posons en effet :

$$x + y = z, \quad x' + y' = z',$$
$$x \equiv x'\ [\omega], \quad y \equiv y'\ [\omega].$$

Il vient : $\quad z' - z = (x' - x) + (y' - y) = n\omega + m\omega,$

c'est-à-dire : $\quad z \equiv z'\ [\omega].$

$$\boxed{(x \equiv x' \quad \text{et} \quad y \equiv y') \implies (x + y \equiv x' + y')}$$

(Les congruences doivent être naturellement de même *module* ω.)

■ L'ensemble des classes de congruence est noté habituellement $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. On peut y définir une *addition*; la somme des classes $\dot{x}$ et $\dot{y}$ est, par définition, la classe de $(x + y)$:

$$\boxed{\dot{x} + \dot{y} = \widehat{x + y}^{\,\cdot}}$$

La propriété précédente montre que la somme obtenue ne dépend pas, en fait, des éléments particuliers x et y, mais seulement des ensembles $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

EXEMPLE. Prenons $\omega = 1$, $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{7}{5}$.

$$\dot{x} = \left\{\ldots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \ldots\right\}$$

$$\dot{y} = \left\{\ldots, -\frac{12}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \ldots\right\}$$

$$\dot{x} + \dot{y} = \left\{\ldots, -\frac{31}{15}, -\frac{16}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{14}{15}, \frac{29}{15}, \ldots\right\}$$

$\left(\text{par exemple : } -\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{31}{15}\right)$.

■ Il est facile de vérifier que cette addition fait de $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ un *groupe commutatif*. En effet, les égalités :

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x + 0 = 0 + x = x$$
$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$
$$x + y = y + x$$

montrent que l'addition dans l'ensemble des classes de congruence est associative, admet $\dot{0}$ comme élément neutre, est telle que la classe $\dot{x}$ admet la classe $\widehat{(-x)}^{\,\cdot}$ comme opposée, et est enfin commutative. Ce groupe est appelé **groupe quotient** par la relation de congruence.

Remarques. — **1** On peut toujours supposer ω strictement positif puisque :

$$x \equiv y\ [\omega] \iff x \equiv y\ [-\omega]$$

d'où : $$\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} = \mathbb{R}/(-\omega)\mathbb{Z}.$$

2 On peut traduire la règle de compatibilité de l'addition et d'une congruence en énonçant que l'on peut toujours *ajouter* entre elles deux congruences de même module. Toutefois, on ne peut pas les *multiplier* entre elles.
Par exemple :

$$\frac{3}{2} \equiv \frac{1}{2}\ [1], \quad \frac{1}{5} \equiv -\frac{9}{5}\ [1],$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \equiv \frac{1}{2} - \frac{9}{5}\ [1] \left(\frac{17}{10} \equiv -\frac{13}{10}\right),$$

mais : $$\frac{3}{2} \times \frac{1}{5} \not\equiv \frac{1}{2} \times \left(-\frac{9}{5}\right)\ [1] \left(\frac{3}{10} \not\equiv -\frac{9}{10}\right).$$

Remarquons simplement que l'on peut multiplier les deux termes d'une congruence *par un même entier* :

$$(x \equiv y\ [\omega]) \implies (nz \equiv ny\ [\omega]) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3 Les congruences modulo π et 2π sont utilisées en analyse pour l'étude des fonctions circulaires, et en géométrie pour l'étude des angles et rotations.

4 Si ω est entier, on peut alors parler de la restriction de la congruence au sous-ensemble $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$, car :

$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \equiv y) \implies (y \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est alors un anneau ; son étude est très importante en arithmétique.

5 Si ω = 1, le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est utilisé dans le calcul par logarithmes, quand on effectue des opérations sur les mantisses des logarithmes sans tenir compte des caractéristiques.
Par exemple : $\log_{10} 4 + \log_{10} 30 = \log_{10} 120$
donne (approximativement) dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\overset{\frown}{0{,}602\,06} + \overset{\frown}{0{,}477\,12} = \overset{\frown}{0{,}079\,18}$$

(l'égalité correspondante dans $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$0{,}602\,06 + 1{,}477\,12 = 2{,}079\,18).$$

D̄Ē 1.1.10 Automorphismes de $\mathbb{R}$.

(*Ce paragraphe est réservé aux élèves de la section* C.)

Déterminons les **automorphismes** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les applications bijectives φ de $\mathbb{R}$ sur lui-même, telles que :

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad (44)\\ &\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (45)\end{aligned}}$$

Soit $a = \varphi(1)$. On peut écrire : $1 \times 1 = 1$; d'où : $a \times a = a$.

Les solutions de l'équation : $a(a - 1) = 0$ sont $a = 0$ et $a = 1$.

Si l'on avait $a = 0$, il en résulterait que, pour tout x :

$$\varphi(x) = \varphi(x \times 1) = \varphi(x)\varphi(1) = 0.$$

Par conséquent, a est égal à 1.

Supposons démontrée l'égalité :

$$\varphi(n) = n \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Alors : $$\varphi(n + 1) = \varphi(n) + \varphi(1) = n + 1.$$

Cette relation est donc vérifiée par récurrence pour tous les entiers naturels, même 0, puisque :

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0).$$

On peut en déduire $\varphi(-n)$; en effet :

$$0 = \varphi(0) = \varphi(n + [-n]) = \varphi(n) + \varphi(-n);$$

d'où : $$\varphi(-n) = -\varphi(n).$$

Si n est un entier relatif non nul, alors :

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(n \times \frac{1}{n}\right) = \varphi(n)\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

d'où : $$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{Z}^*),$$

et, plus généralement :

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi(m)\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Si x est un rationnel, on a donc :

$$\varphi(x) = x.$$

Admettons que tout nombre positif ou nul est le carré d'un nombre réel (ceci résulte assez facilement du théorème sur les intervalles emboîtés qui donne une construction effective des valeurs approchées de la racine cherchée). Alors :

$$(x \geqslant 0) \implies (x = y^2),$$

$$(x = y^2) \implies (\varphi(x) = [\varphi(y)]^2),$$

soit :

$$(x \geqslant 0) \implies (\varphi(x) \geqslant 0).$$

Considérons les suites (a_n) et (b_n) des valeurs approchées d'un réel x. On peut écrire :

$$x - a_n \geqslant 0, \qquad \varphi(x - a_n) \geqslant 0$$

$$b_n - x \geqslant 0, \qquad \varphi(b_n - x) \geqslant 0.$$

D'après l'égalité :

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y),$$

qui est une conséquence immédiate de l'égalité (44), on a donc :

$$\varphi(x) - \varphi(a_n) \geqslant 0$$

$$\varphi(b_n) - \varphi(x) \geqslant 0.$$

Mais a_n et b_n sont des rationnels.

Par conséquent :

$$\varphi(a_n) = a_n, \qquad \varphi(b_n) = b_n,$$

$$a_n \leqslant \varphi(x) \leqslant b_n.$$

$\varphi(x)$ appartient donc à l'intersection de tous les intervalles fermés bornés emboîtés $[a_n, b_n]$. Mais ceux-ci n'ont qu'un seul point commun : x. Par conséquent, $\varphi(x)$ est égal à x pour toutes les valeurs réelles de x.

THÉORÈME 6 / L'identité est le seul automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

(Il existe des corps qui admettent des automorphismes autres que l'identité; c'est le cas du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, avec l'application définie par :

$$\varphi(a + ib) = a - ib.)$$

EXERCICES

1.1 Démontrer, dans un corps commutatif, les relations suivantes :

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0;$$
$$-(a + b) = (-a) + (-b);$$
$$-(ab) = (-a)\,b = a(-b);$$
$$-(a - b) = b + (-a);$$
$$(-a)\,b^{-1} = -(ab^{-1}) = a(-b)^{-1}.$$

1.2 Démontrer les implications (16) à (25) de la page 4.

1.3 Formaliser la démonstration de l'existence d'un isomorphisme entre $\mathbb{Z}$ et une partie de K, esquissée dans le 5 du paragraphe n° **1.1.1**.

1.4 Démontrer, dans un corps commutatif totalement ordonné, les implications :

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d) \implies (a + c \geqslant b + d);$$
$$(a \geqslant b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad c \geqslant d \geqslant 0) \implies (ac \geqslant bd).$$

1.5 Comparer, dans un corps commutatif totalement ordonné, les deux nombres $x + y$ et xy.

1.6 Démontrer, dans un corps commutatif totalement ordonné, les implications :

$$(a - b > x - y) \implies (a - x > b - y);$$
$$(a \geqslant b \geqslant 0) \implies (a^n \geqslant b^n) \qquad (n \in \mathbb{N});$$
$$(a \geqslant b \geqslant 0) \implies ([a^2 + b^2]^3 \geqslant [a^3 + b^3]^2).$$

1.7 Démontrer qu'il existe une infinité d'éléments d'un corps commutatif totalement ordonné compris entre deux éléments donnés.

1.8 A et B étant deux sous-ensembles non vides majorés et minorés de $\mathbb{R}$, comparer :

$$\sup \mathrm{A}; \quad \sup \mathrm{B}; \quad \sup (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}); \quad \sup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \quad \text{(s'il existe).}$$

1.9 Même exercice avec les *inf*.

1.10 A étant non vide et inclus dans le sous-ensemble B de $\mathbb{R}$, démontrer les inégalités :

$$\inf \mathrm{B} \leqslant \inf \mathrm{A} \leqslant \sup \mathrm{A} \leqslant \sup \mathrm{B}.$$

1.11 Si A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ admettant des maximums, en est-il de même :

de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$? de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$?
de la différence $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{x;\, x \in \mathrm{A},\, x \notin \mathrm{B}\}$?
de la différence symétrique : $\mathrm{A} \,\Delta\, \mathrm{B} = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$?

1.12 A et B étant deux sous-ensembles non vides majorés et minorés de $\mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{x;\, \exists_{\mathrm{A}} a,\, \exists_{\mathrm{B}} b,\, x = a + b\}.$$

Comparer $\sup(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ et $(\sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B})$.

1.13 Comparer de même $inf(A + B)$ et $(inf\, A + inf\, B)$.

1.14 Même exercice avec :

$$AB = \{x ; \exists_A a, \exists_B b, x = ab\}.$$

en comparant $sup\, AB$ et $(sup\, A)\,(sup\, B)$, puis $inf\, AB$ et $(inf\, A)\,(inf\, B)$.

Peut-on avoir : $inf\, AB = (inf\, A)\,(sup\, B)$?

1.15 La différence I − J de deux intervalles d'un ensemble ordonné est-elle un intervalle ? Même exercice pour la différence symétrique (voir l'exercice n° 1.11).

1.16 Démontrer que tous les intervalles contenant une partie majorée et minorée de $\mathbb{R}$ admettent comme sous-ensemble commun un intervalle particulier. Peut-on étendre ce résultat à une partie quelconque de $\mathbb{R}$?

1.17 Démontrer que les éléments A et B d'une coupure sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1.18 Démontrer que, pour tout rationnel positif r tel que : $r^2 < 2$, il existe un rationnel positif s tel que :

$$r^2 < s^2 < 2.$$

1.19 Même exercice avec :

$$r^2 > 2 \quad \text{et} \quad r^2 > s^2 > 2.$$

1.20 Démontrer qu'il n'existe pas d'autres intervalles de $\mathbb{R}$ que ceux qui sont dénombrés page 11.

1.21 Même exercice pour $\overline{\mathbb{R}}$.

1.22 a, b, c étant trois éléments strictement positifs d'un corps commutatif totalement ordonné, démontrer l'inégalité :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\left(\text{comparer } \frac{ab}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{4}\right).$$

Quand y a-t-il égalité ?

1.23 Si l'on peut écrire les inégalités :

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1, \qquad c \leqslant a + b,$$

dans un corps commutatif totalement ordonné, on peut en déduire les inégalités :

$$0 \leqslant (a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c) \leqslant 3.$$

1.24 x, y et z étant trois éléments d'un corps commutatif totalement ordonné, liés par l'inégalité :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,$$

démontrer que, si A est l'ensemble des nombres $t = xy + yz + zx$, alors :

$$max\, A = 1, \qquad min\, A = -\frac{1}{2}.$$

1.25 Démontrer l'existence d'une bijection φ de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

1.26 Même exercice avec l'intervalle $]a, b[$.

1.27 Même exercice avec l'intervalle]0, 1] (on pourra faire correspondre d'abord 1 à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{4}$, etc . . . , et en déduire une bijection entre l'intervalle]0, 1[et l'intervalle]0, 1]).

1.28 Démontrer complètement les propositions du n° **1.1.7** relatives au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

1.29 Démontrer l'implication :

$$(|x + y| \leqslant z \quad \text{et} \quad |x - y| \leqslant z) \implies (|x| + |y| \leqslant z).$$

1.30 Démontrer l'équivalence :

$$|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y.$$

1.31 Même exercice avec le signe $<$.

1.32 Étudier dans $\mathbb{R}$ la loi définie par l'égalité :

$$x * y = |x - y|.$$

1.33 Même exercice dans $\mathbb{R}^+$.

1.34 Même exercice pour la loi définie par :

$$x * y = x + y + 1$$

(dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^+$).

1.2 CALCULS D'INCERTITUDES

1.2.1 Incertitudes.

■ Considérons un nombre réel x. Tout nombre réel a peut être envisagé comme une « **valeur approchée** » de x ; l'**erreur** commise en remplaçant x par a dans un calcul est, par définition, le nombre $|x - a|$.

Généralement, cette erreur est, soit inconnue (c'est le cas où l'on substitue, à la valeur exacte d'une longueur, le résultat d'une mesure effectuée avec un instrument imparfait), soit malaisée à utiliser (si l'on utilise 1,414 au lieu de $\sqrt{2}$, l'erreur ne peut s'exprimer que sous une forme complexe, par exemple à l'aide d'une infinité de décimales).

C'est pourquoi on utilise pratiquement, en fait, une notion voisine de celle d'erreur, la notion d'**incertitude** (ou incertitude **absolue**).

DÉFINITION / 5 **On appelle *incertitude absolue* d'une valeur approchée a d'un nombre réel x tout nombre supérieur ou égal à l'*erreur absolue* $|x - a|$.**

EXEMPLE. Soit : $x = \pi$, $a = 3{,}14$.

Les nombres suivants sont des incertitudes absolues :

$$\frac{1}{500},\quad \frac{16}{10\,000},\quad 1.$$

En effet : $$|\pi - 3{,}14| = 0{,}001\,592\,65\ldots < \frac{16}{10\,000} < \frac{1}{500} < 1.$$

■ Si le nombre x représente la mesure d'une grandeur, il sera affecté par un changement d'unité. Aussi a-t-on introduit la notion d'**incertitude relative** qui n'est pas soumise à cette servitude.

DÉFINITION / 6 **On appelle *incertitude relative* d'une valeur approchée a d'un nombre réel non nul x tout nombre supérieur ou égal à l'*erreur relative* $\left|\dfrac{x - a}{x}\right|$.**

EXEMPLE. Soit : $x = \pi$, $a = 3{,}14$.
Les nombres suivants sont des incertitudes relatives :

$$\frac{6}{10\,000},\quad \frac{1}{1\,900},\quad 1.$$

En effet :
$$\left|\frac{\pi - 3{,}14}{\pi}\right| = 0{,}000\,507\ldots < \frac{1}{1\,900} < \frac{6}{10\,000} < 1.$$

■ La connaissance d'une incertitude absolue permet un **encadrement** :

$$\boxed{(|x - a| \leqslant r) \implies (a - r \leqslant x \leqslant a + r)} \qquad (46)$$

La connaissance d'une incertitude relative ne permet pas un encadrement aussi simple. Supposons, par exemple : $x > 0$. Nous connaissons la valeur approchée a et une incertitude relative s :

$$\left(\left|\frac{x - a}{x}\right| \leqslant s\right) \implies \left(-s \leqslant \frac{x - a}{x} \leqslant s\right),$$

ou encore :

$$a \leqslant (1 + s)x, \qquad (1 - s)x \leqslant a.$$

Supposons que s soit strictement inférieure à 1 (ce qui est naturellement le cas dans la pratique). Alors :

$$\boxed{\frac{a}{1 + s} \leqslant x \leqslant \frac{a}{1 - s}} \qquad (47)$$

ou encore, $$-\frac{s}{1 + s}a \leqslant x - a \leqslant \frac{s}{1 - s}a.$$

Si s est petit $\left(\text{par exemple : } s < \dfrac{1}{1\,000}\right)$, on peut en déduire un encadrement approximatif :

$$-as \leqslant x - a \leqslant as$$

$\left(\text{ce qui revient, en fait, à admettre la majoration } \left|\dfrac{x - a}{a}\right| \leqslant s \text{ et non } \left|\dfrac{x - a}{x}\right| \leqslant s\right)$.

EXEMPLE. *Donner un encadrement d'un réel x sachant que 2,718 est une valeur approchée avec une incertitude relative de 10^{-4}.*

Appliquons la formule (47) :

$$\frac{2{,}718}{1{,}000\,1} \leqslant x \leqslant \frac{2{,}718}{0{,}999\,9},$$

$$-\frac{0{,}000\,271\,8}{1{,}000\,1} \leqslant x - 2{,}718 \leqslant \frac{0{,}000\,271\,8}{0{,}999\,9},$$

c'est-à-dire encore :

$$-0{,}000\,271\,77\ldots \leqslant x - 2{,}718 \leqslant 0{,}000\,271\,83\,.$$

$$2{,}717\,728\,22\ldots \leqslant x \leqslant 2{,}718\,271\,83\ldots.$$

Nous retiendrons l'encadrement :

$$2{,}717\,7 < x < 2{,}718\,3.$$

1.2.2 Représentation décimale d'un nombre réel.

Les valeurs approchées les plus usitées sont naturellement les valeurs approchées décimales, par défaut et par excès. Soit un réel x, et le couple (a_n, b_n) de ses valeurs approchées à 10^{-n} près. Nous savons que :

$$a_n \leqslant x < a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Une incertitude absolue de la valeur approchée a_n (ou d'ailleurs de b_n) est donc égale à 10^{-n}.

Techniquement, on ne se donne pas la suite (a_n) des valeurs approchées par défaut, mais la suite des décimales composant ces nombres. Nous avons vu en effet que les nombres a_n et b_n étaient tels que :

$$10^n a_n = q_n \in \mathbb{Z}, \qquad 10^n b_n = q_n + 1 \in \mathbb{Z},$$

$$10^{n+1} a_{n+1} = q_{n+1} \in \mathbb{Z}, \qquad 10^{n+1} b_{n+1} = q_{n+1} + 1 \in \mathbb{Z},$$

$$10 q_n \leqslant q_{n+1} \leqslant 10^{n+1} x < q_{n+1} + 1 \leqslant 10 q_n + 10.$$

On en déduit l'égalité :

$$q_{n+1} = 10 q_n + r_n, \qquad 0 \leqslant r_n \leqslant 9.$$

La donnée de q_0 et des nombres r_n, entiers écrits à l'aide d'un seul chiffre, équivaut donc à celle des nombres a_n : elle permet de connaître x.

EXEMPLE. Soit $x = \frac{3}{7}$.

Le calcul classique permet d'obtenir les suites :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{4}{10}, \quad a_2 = \frac{42}{10^2}.$$

$$a_3 = \frac{428}{10^3}, \quad a_4 = \frac{4\,285}{10^4}, \quad a_5 = \frac{42\,857}{10^5},$$

$$a_6 = \frac{428\,571}{10^6}, \quad a_7 = \frac{4\,285\,714}{10^7}$$

ou encore : $q_0 = 0$, $q_1 = 4$, $q_2 = 42$, $q_3 = 428$, $q_4 = 4\,285$, $q_5 = 42\,857$, $q_6 = 428\,571$, $q_7 = 4\,285\,714$, ...,

c'est-à-dire :

$r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 8$, $r_3 = 5$, $r_4 = 7$, $r_5 = 1$, $r_6 = 4$, ...

Les nombres r_m $(m \leqslant n)$ ne sont autres que ceux qui apparaissent dans l'écriture, en base 10, de l'entier $10^{n+1}(x - q_0)$:

$$\boxed{\mathbf{10^{n+1}(x - q_0) = 10^n r_0 + 10^{n-1} r_1 + \cdots + 10 r_{n-1} + r_n}} \quad (48)$$

(Par exemple :

$$10^7\left(\frac{3}{7} - 0\right) = 4.10^6 + 2.10^5 + 8.10^4 + 5.10^3 + 7.10^2 + 1.10 + 4.)$$

L'écriture symbolique :

$$x - q_0 = \overline{0, r_0 r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r_n \cdots}$$

est appelée *représentation décimale* (ou *développement décimal*) de x. L'entier relatif q_0 peut, naturellement, être écrit lui-même dans le système de base 10.

Par exemple :

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,21.\ \ldots;$$

$$-\pi = -4 + 0{,}858\,407\,346\,41.\ \ldots.$$

Si x est un nombre négatif, on peut encore écrire le développement décimal de $(-x)$ et le faire précéder du signe $(-)$.

Par exemple :

$$-\pi = -3{,}141\,592\,653\,58.\ \ldots.$$

1.2.3 Incertitudes sur une somme et une différence.

1 Considérons deux réels x et x', deux valeurs approchées a et a', deux incertitudes absolues r et r'.

Il est normal de considérer que $(a + a')$ est une valeur approchée de la somme :

$$y = x + x'.$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$|y - a - a'| = |x - a + x' - a'| \leqslant |x - a| + |x' - a'|,$$

c'est-à-dire : $|y - a - a'| \leqslant r + r'$.

THÉORÈME / 7 **On obtient une incertitude absolue sur une somme en ajoutant des incertitudes absolues sur chacun des termes de la somme.**

2 Il est normal de considérer que $(a - a')$ est une valeur approchée de la différence :

$$z = x - x'.$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$|z - a + a'| = |x - a + a' - x'| \leqslant |x - a| + |a' - x'|,$$

c'est-à-dire : $|z - a + a'| \leqslant r + r'$.

THÉORÈME / 8 **On obtient une incertitude absolue sur une différence en *ajoutant* des incertitudes absolues sur chacun des termes de la différence.**

(Le théorème serait évidemment faux si l'on *soustrayait* les incertitudes sur x et x'.)

Les résultats sont plus complexes pour les incertitudes relatives.

3 Supposons que nous sachions que a et a' sont toutes deux des valeurs approchées par défaut. Alors :

$$a \leqslant x \leqslant a + r, \qquad a' \leqslant x' \leqslant a' + r'.$$

On en déduit aussitôt que $(a + a')$ est une valeur approchée par défaut de la somme $(x + x')$.

De même, $(a + a')$ est approchée par excès si a et a' sont approchées par excès. On ne peut rien dire de particulier si a et a' sont des valeurs approchées de nature différente.

Supposons maintenant que a soit approchée par excès et a' par défaut. On ne peut rien dire pour la somme, mais il est évident que $(a - a')$ est une valeur approchée par excès de $(x - x')$, et que $(a' - a)$ est une valeur approchée par défaut de $(x' - x)$.

THÉORÈME / 9 **La somme de deux valeurs approchées par défaut (resp. par excès) est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de la somme. On obtient une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de la différence en soustrayant une valeur approchée par excès (resp. par défaut) d'une valeur approchée par défaut (resp. par excès).**

1.2.4 Incertitudes sur un produit et un quotient.

1 Considérons deux réels x et x' strictement positifs, deux valeurs approchées a et a' également strictement positives, deux incertitudes relatives s et s'.

Il est normal de considérer que aa' est une valeur approchée du produit : $u = xx'$.

On peut vérifier facilement l'égalité :

$$xx' - aa' = x'(x - a) + x(x' - a') - (x - a)(x' - a').$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{xx' - aa'}{xx'} = \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'} - \frac{x - a}{x}\frac{x' - a'}{x'}} \qquad (49)$$

Si a et a' sont des valeurs approchées par défaut, aa' est également une valeur approchée par défaut, comme le montre l'égalité :

$$xx' - aa' = x'(x - a) + a(x' - a').$$

D'autre part, le nombre :

$$\frac{x - a}{x}\frac{x' - a'}{x'}$$

est positif ou nul. On en déduit les inégalités :

$$0 \leqslant \frac{xx' - aa'}{xx'} \leqslant \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'}.$$

La somme $(s + s')$ est donc une incertitude relative sur le produit.

2 Si a est approchée par défaut et a' approchée par excès, on peut écrire :

$$\frac{xx' - aa'}{xx'} = \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'}\left(1 - \frac{x - a}{x}\right);$$

d'où : $$\left|\frac{xx' - aa'}{xx'}\right| \leqslant \left|\frac{x - a}{x}\right| + \left|\frac{a' - x'}{x'}\right|\left|1 - \frac{x - a}{x}\right|,$$

et même : $$\left|\frac{xx' - aa'}{xx'}\right| \leqslant \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'},$$

puisque $\left|1 - \frac{x - a}{x}\right|$, égal à $\frac{a}{x}$, est compris entre 0 et 1. Ici encore, $(s + s')$ est donc une incertitude relative sur le produit, mais on ne connaît pas la nature de la valeur approchée aa'.

3 Supposons enfin que a et a' soient des valeurs approchées par excès. Alors :

$$\frac{aa' - xx'}{xx'} = \frac{a - x}{x} + \frac{a' - x'}{x'} + \frac{a - x}{x}\frac{a' - x'}{x'}.$$

aa' est donc une valeur approchée par excès, et l'on peut écrire les inégalités :

$$0 \leqslant \frac{aa' - xx'}{xx'} \leqslant s + s' + ss'.$$

Si nous supposons — ce qui est généralement le cas — que l'une des erreurs s ou s' est petite $\left(\text{par exemple si } s < \frac{1}{1\,000}\right)$, on peut négliger le terme ss' ; $(s + s')$ est encore pratiquement une incertitude relative sur le produit.

THÉORÈME / 10 **Le produit de deux valeurs approchées (resp. approchées par défaut, resp. approchées par excès) positives de deux nombres réels strictement positifs est une valeur approchée (resp. approchée par défaut, resp. approchée par excès) de leur produit.**

La somme d'incertitudes relatives sur les facteurs est une incertitude relative sur le produit si l'une des valeurs est approchée par défaut.

On peut étendre ce résultat au cas général sans risque important si l'une des incertitudes relatives est petite.

Les cas où l'un au moins des nombres x ou x' est négatif se traitent facilement à l'aide de ce théorème.

4 Il est normal de considérer que le nombre $\frac{a}{a'}$ est une valeur approchée du quotient $\frac{x}{x'}$.

Supposons que a soit approchée par défaut, et a' approchée par excès. On peut écrire :

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{a'x - ax'}{a'x}$$

$$= \frac{a'(x - a) + a(a' - x')}{a'x},$$

ou encore :

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'}\frac{ax'}{a'x}.$$

$\frac{a}{a'}$ est donc une valeur approchée par défaut. De plus :

$$\frac{ax'}{a'x} \leqslant \frac{xx'}{a'x} \leqslant \frac{xx'}{x'x}.$$

Par conséquent :

$$0 \leqslant \frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} \leqslant \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'}.$$

On voit que la somme $(s + s')$ est une incertitude sur le quotient (bien noter que a et a' sont de nature différente).

5 Supposons maintenant que a soit approchée par excès et a' approchée par défaut.

On peut écrire :

$$\frac{\frac{a}{a'} - \frac{x}{x'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{a - x}{x} + \frac{x' - a'}{x'}\frac{ax'}{a'x}.$$

$\frac{a}{a'}$ est donc une valeur approchée par excès, mais on ne peut rien dire, en général, sur l'incertitude relative sur $\frac{x}{x'}$.

6 Dans le cas général, on peut mettre l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{x - a}{x} - \frac{x' - a'}{x'} \frac{1 - \frac{x-a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}};$$

d'où l'inégalité :

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} \leqslant \left|\frac{x - a}{x}\right| + \left|\frac{x' - a'}{x'}\right| \frac{1 - \frac{x-a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}}.$$

Si les deux incertitudes s et s' sont petites (par exemple si $s \leqslant s' < \frac{1}{1\,000}$), on peut remplacer pratiquement le nombre :

$$\frac{1 - \frac{x-a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}}$$

par 1. On en déduit alors que $(s + s')$ est encore pratiquement une incertitude relative sur le quotient.

THÉORÈME / 11 **Le quotient de deux valeurs approchées strictement positives de deux nombres strictement positifs est une valeur approchée de leur quotient.**

Si le numérateur est approché par excès et le dénominateur par défaut, le quotient est approché par excès.

Si le numérateur est approché par défaut et le dénominateur par excès, le quotient est approché par défaut. Dans ce cas, la somme des incertitudes relatives sur les termes est une incertitude relative sur le quotient.

On peut étendre ce dernier résultat au cas général sans risque important si les deux incertitudes relatives sont petites.

EXEMPLE. *On donne les encadrements :*

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415. \qquad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$$

Calculer les nombres définis par :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, \quad \beta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

Un calcul direct donne, évidemment :

$$\alpha = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{2 - 3} = -5 - 2\sqrt{6}. \qquad \beta = -1.$$

Employons une autre méthode qui nous permettra d'utiliser les théorèmes précédents.

■ Il est immédiat d'obtenir les encadrements :

$$3{,}146 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}148;$$
$$-0{,}319 < \sqrt{2} - \sqrt{3} < -0{,}317.$$

Nous prendrons les valeurs approchées :

$$a \doteq 3{,}147, \qquad a' = -0{,}318,$$

avec les incertitudes relatives :

$$s \geqslant \frac{0{,}001}{3{,}146} \qquad \left(\text{par exemple } s = \frac{1}{3\,000}\right).$$
$$s' \geqslant \frac{0{,}001}{0{,}317} \qquad \left(\text{par exemple } s' = \frac{1}{300}\right);$$

α et β étant négatifs, nous calculerons $|\alpha|$ et $|\beta|$.

■ Une valeur approchée de $|\alpha|$ est égale à :

$$\frac{a}{|a'|} = \frac{3{,}147}{0{,}318} = 9{,}896\,2\ldots.$$

Une incertitude relative sur le quotient est pratiquement égale à la somme :

$$s + s' = \frac{1}{3\,000} + \frac{1}{300} = \frac{11}{3\,000} < \frac{1}{250}.$$

Une incertitude absolue sur $|\alpha|$ est donc égale à $\frac{|\alpha|}{250}$.

Elle est certainement inférieure à :

$$\frac{10}{250} = 0{,}04.$$

On peut donc écrire les inégalités :

$$9{,}85 < |\alpha| < 9{,}93;$$
$$-9{,}93 < \alpha < -9{,}85$$
$$(\text{en fait } \alpha = -5 - 2\sqrt{6} = -9{,}898\ldots).$$

■ Une valeur approchée de $|\beta|$ est égale à :

$$a|a'| = 3{,}147 \times 0{,}318 = 1{,}000\,746.$$

Une incertitude relative sur le produit est, ici encore, inférieure à $\frac{1}{250}$. Une incertitude absolue sur $|\beta|$ est donc inférieure à $\frac{|\beta|}{250}$, soit pratiquement 0,004.

On peut donc écrire les inégalités :

$$0{,}996 < |\beta| < 1{,}005;$$
$$-1{,}005 < -\beta < -0{,}996$$

(en fait $\beta = -1$).

Les résultats ci-dessus seront utilisés pour le calcul numérique.

EXERCICES

1.35 Calculer les nombres :

$$\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}};$$
$$\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \quad (1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415)$$

1.36 Quel est le plus grand des deux nombres :

$$23 + \frac{8}{19} + \frac{15}{19^2} + \frac{7}{19^3} + \frac{11}{19^4},$$
$$23 + \frac{8}{19} + \frac{11}{19^2} + \frac{18}{19^3} + \frac{16}{19^4}?$$

1.37 Démontrer que le développement décimal d'un nombre rationnel est tel qu'à partir d'un certain rang n, les décimales se reproduisent périodiquement.

1.38 Démontrer que le nombre défini par :

$$0{,}721\,253\,253\,253\ldots$$

est rationnel.

1.39 Démontrer qu'une suite d'entiers r_n ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r_n \leqslant 9$) définit le développement décimal d'un nombre réel compris entre 0 et 1 sauf si, et seulement si, tous les nombres r_n sont égaux à 9 à partir d'un certain rang.

1.40 $a, b, c, d, a', b', c', d'$ étant des nombres réels, démontrer les implications suivantes :

$$(a < b \quad \text{et} \quad c < d) \implies (a - b < d - c \quad \text{et} \quad d - a < c - b),$$

$$(a < a' \quad \text{et} \quad b' > b) \implies (a + b < a' + b' \quad \text{et} \quad a - a' < b + b'),$$

$$\left(0 < \frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'} < \frac{d}{d'}\right) \implies \left(\frac{a}{a'} < \frac{a + b + c + d}{a' + b' + c' + d'} < \frac{d}{d'}\right).$$

Donner des exemples numériques où ces nombres sont définis par des valeurs approchées à 10^{-3} près.

1.41 Calculer les incertitudes absolues et relatives sur le nombre π quand on prend les valeurs approchées suivantes :

$$3; \quad 3{,}14; \quad \frac{22}{7}; \quad 3 + \frac{10}{71}; \quad \frac{355}{113}.$$

1.42 Calculer à 10^{-3} près les nombres :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9};$$

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{1.3.5.7};$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

1.43 Calculer à 10^{-4} près les nombres :

$$\frac{7}{11} + \frac{8}{13} + \frac{64}{97} + \frac{53}{91};$$

$$\frac{5}{11} + \frac{7}{22} + \frac{8}{33} + \frac{9}{44}.$$

1.44 Calculer $\pi\sqrt{2}$ sachant que :

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415; \qquad 3{,}141\,592 < \pi < 3{,}141\,593.$$

1.45 Calculer le nombre :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{(volume d'une sphère)}$$

sachant que $R = 0{,}5 + \alpha$ avec $|\alpha| \leqslant 10^{-3}$.

1.46 Calculer $\frac{1}{\pi}$ à 10^{-4} près ($\pi = 3{,}141\,592\,653\,5\ldots$).

1.47 Calculer à 10^{-4} près les nombres :

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{1.3.5.7.9};$$

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

PROBLÈMES

1.48 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA PARTIE ENTIÈRE.

1° Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier relatif unique $[x]$, appelé *partie entière* de x, tel que :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

2° Étudier les applications qui associent successivement à x les nombres :

$$[x], \quad [-x], \quad [x] + [1 - x], \quad -[x] - [-x].$$

3° Parmi les relations suivantes :

$$x > n, \qquad [x] > n, \qquad [x] \geqslant n, \qquad x \geqslant n \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

choisir tous les couples (R, R′) de relations telles que l'implication (R $\Longrightarrow$ R′) soit vraie. (On pourra tracer un diagramme.)

4° Même problème avec :

$$x \leqslant n, \qquad [x] \leqslant n, \qquad [x] < n, \qquad x < n.$$

5° Même problème avec :

$$x > y, \qquad [x] > [y], \qquad [x] \geqslant [y], \qquad x \geqslant y.$$

6° y étant strictement positif, on pose :

$$\mathbf{f}(x, y) = \left[\frac{1}{y}[xy]\right].$$

Démontrer l'inégalité : $\mathbf{f}(x, y) \leqslant [x]$.
Démontrer l'égalité : $\mathbf{f}(x, y) = [x]$ si y est entier.

7° y étant strictement supérieur à 1, on pose :

$$\mathbf{g}(x, y) = \left[\frac{1}{[y]}[xy]\right].$$

Démontrer l'inégalité $\mathbf{g}(x, y) \geqslant [x]$ si x est positif.

8° Calculer un couple (x, y) et un couple (x', y') tels que :

$$\mathbf{f}(x, y) < [x] < \mathbf{g}(x, y),$$
$$x' < 0, \qquad \mathbf{f}(x', y') < [x'], \qquad \mathbf{g}(x', y') < [x'].$$

9° Si x est un réel et a, b, c trois entiers strictement positifs, démontrer l'égalité :

$$\left[\frac{x}{abc}\right] = \left[\frac{1}{a}\left[\frac{1}{b}\left[\frac{x}{c}\right]\right]\right].$$

10° Tracer les graphes des applications qui associent successivement à x les nombres :

$$\delta(x) = \left[\frac{1}{x^2 + 1}\right], \qquad \omega(x) = \left[\frac{x}{x^2 + 1}\right],$$
$$s(x) = \omega(x) - \omega(-x), \qquad v(x) = xs(x).$$

Comparer $v(x)$ et $|x|$.

11° **Étudier l'application définie par :**

$$\varphi = \left[x \longmapsto \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right]([x] + [1 - x])\right].$$

12° **Démontrer que les nombres d'entiers appartenant aux intervalles** $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ **sont donnés par les formules respectives :**

$$[b] - [a], \quad [-a] - [-b], \quad [b] + [1 - a].$$

13° a **et** b **étant deux entiers premiers entre eux, on pose** $x = \frac{a}{b}$. **Démontrer l'égalité :**

$$[x] + [2x] + \cdots + [(b - 1)x] = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}.$$

14° **Démontrer l'égalité :**

$$\sum_{m=0}^{n} \left[\frac{2m}{3}\right] = \left[\frac{n^2}{3}\right].$$

15° **Démontrer l'égalité :**

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] = [x]$$

et sa généralisation :

$$[nx] = \sum_{m=0}^{n-1} \left[x + \frac{m}{n}\right].$$

Remarque. — Les questions sont pratiquement indépendantes entre elles.

1.49 1° **Démontrer, par récurrence sur** $m \geqslant 1$, **l'implication :**

$$[m \leqslant n] \implies \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right] \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

2° **En déduire l'inégalité :**

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

3° **En déduire l'inégalité :**

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < 3^p \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

4° **Démontrer l'implication :**

$$[n \geqslant 3) \implies [(n + 1)^n < n^{n+1}].$$

5° **En déduire l'implication :**

$$[n > m \geqslant 3] \implies [m^n > n^m].$$

6° **Posant** $a = 1 + \frac{1}{n}$, $b = 1 + \frac{1}{n + 1}$, **démontrer l'inégalité :**

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)(n + 1)\, a^n.$$

7° En déduire l'inégalité :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

8° Démontrer que l'ensemble A des nombres de la forme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ admet une borne supérieure.

1.50 1° P et Q étant deux polynomes à coefficients réels tels que Q ne soit pas nul, on note $\frac{P}{Q}$ l'ensemble des couples de polynomes (A, B) tels que :

$$PB = QA, \qquad B \neq 0.$$

Démontrer que l'ensemble des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ reçoit la structure de corps commutatif si on le munit d'une addition et d'une multiplication telle que :

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' + P'Q}{QQ'},$$

$$\frac{P}{Q}\frac{P'}{Q'} = \frac{PP'}{QQ'}$$

(on légitimera ces écritures dans lesquelles la fraction $\frac{P}{Q}$ pourrait être remplacée par n'importe quelle fraction $\frac{A}{B}$ telle que PB = QA).

2° On note $\frac{P}{Q} \succ \frac{P'}{Q'}$ si, et seulement si, on peut trouver un réel y tel que

$$(x > y) \implies \left(\frac{P(x)}{Q(x)} > \frac{P'(x)}{Q'(x)}\right).$$

Vérifier la relation : $x^2 \succ nx \qquad (n \in \mathbb{N})$.

3° Démontrer que la relation $\succ$ fait du corps des fractions rationnelles réelles un corps commutatif totalement ordonné dans lequel le théorème d'Archimède n'est pas vérifié.

1.51 x étant irrationnel, n et n' entiers relatifs, on considère les nombres X de la forme : $X = nx - n'$.

On pose $X = (x, n, n')$.

1° x étant donné, choisir n et n' pour que $X = 0$.

2° x étant donné, à quelles conditions a-t-on : $X = X_1$ avec $X_1 = (x, n_1, n'_1)$?

3° x étant donné positif, démontrer qu'il existe une infinité de nombres X tels que :

$$0 < X < 1.$$

4° x étant donné, démontrer que l'on peut choisir n et n' de façon que $|X| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, soit aussi petit que l'on veut.

(Ce problème ne peut être traité que par les élèves de Terminale C.)

1.52 x_1 désignant un réel positif, on appelle a_1 sa partie entière ($a_1 \geqslant 0$) et l'on pose :

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad \text{donc : } \quad x_2 > 1.$$

Puis on appelle a_2 la partie entière de x_2 ($a_2 \geqslant 1$) et l'on pose :

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad \text{donc : } \quad x_3 > 1,$$

et ainsi de suite.
On écrit :

$$r_1 = a_1, \quad r_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad r_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \quad \text{etc.}$$

On écrit encore : $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}, \qquad r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}, \qquad r_3 = \dfrac{p_3}{q_3}, \quad \ldots,$

avec : $p_1 = a_1; \quad p_2 = a_1a_2 + 1; \quad p_3 = a_1a_2a_3 + a_1 + a_3;$

$q_1 = 1; \quad q_2 = a_2; \quad q_3 = a_2a_3 + 1; \quad \text{etc.}$

Le nombre r_n est appelé *réduite* de rang n du nombre x_1.

1° Établir les relations :

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2};$$
$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2};$$

(Raisonner par récurrence.)

$$p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^n;$$

$$x_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{x_1 - r_{n-1}}{r_n - x_1};$$

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}};$$

$$r_n = r_1 + \frac{1}{q_1q_2} - \frac{1}{q_2q_3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

2° Démontrer que :

a) r_n est irréductible;

b) $p_{n+1} > p_n$ et $q_{n+1} > q_n$;

c) $r_2 > r_4 > r_6 > r_8 \ldots,$

$r_1 < r_3 < r_5 < r_7 \ldots;$

d) x_1 est compris entre r_n et r_{n+1} et est plus près de la réduite qui a le rang le plus élevé.

3° Former les réduites des nombres :

$$\frac{22}{15}, \quad \frac{256}{117}, \quad \frac{117}{256}.$$

En déduire les solutions en nombres entiers de l'équation $256x - 117y = 1$.

4° Former les réduites du nombre :

$$x_1 = \pi \simeq 3{,}141\,592\,653$$

jusqu'à r_4.

1.53 Ce problème a pour objet l'étude des sous-groupes additifs, et de certains sous-groupes multiplicatifs du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Les diverses questions sont largement indépendantes.

Première partie : Étude des sous-groupes additifs de l'ensemble $\mathbb{R}$.

On s'intéressera dans la suite au cas où le sous-groupe additif A n'est pas le sous-groupe trivial $\{0\}$.

1° Supposons d'abord que l'ensemble des éléments strictement positifs de A possède un plus petit élément, noté a_0. Démontrer alors que A est l'ensemble $\mathbb{Z}a_0 = \{ka_0 ; k \in \mathbb{Z}\}$. (On pourra faire la division euclidienne d'un élément quelconque a de A par a_0.)

2° Supposons maintenant que l'ensemble des éléments strictement positifs de A n'a pas de plus petit élément.

a) Soit un intervalle $I =]0, \alpha]$ tel que $I \cap A \neq \varnothing$. Soit n un entier naturel quelconque. Démontrer que l'on réalise alors une partition de I en posant :

$$I = \bigcup_{p=0}^{p=m-\alpha} I_p \quad \text{avec} \quad I_p = \left]\frac{p\alpha}{m}, \frac{(p+1)\alpha}{m}\right].$$

Démontrer qu'il existe un intervalle I_p contenant au moins deux éléments de A. En déduire que, quel que soit le réel ε strictement positif $A \cap]0, \varepsilon] \neq \varnothing$.

b) Soit J un intervalle quelconque non vide $[\beta, \gamma]$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que $J \cap A \neq \varnothing$. Pour traduire cette situation on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

3° *Application.* A quelle condition nécessaire et suffisante le sous-groupe additif engendré par deux nombres réels non nuls a et b est-il du premier type ?

Exemple. En prenant $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, démontrer que :

$$\forall_{\mathbb{R}^{*+}} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbb{Z}} p, \quad \exists_{\mathbb{Z}} q, \quad \left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{q}.$$

Seconde partie : Étude des sous-groupes multiplicatifs de l'ensemble $\mathbb{R}^{*+}$.

1° En utilisant un isomorphisme croissant, noté e, du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{*+}$ des réels strictement positifs, montrer que si le sous-groupe multiplicatif M de $\mathbb{R}^{*+}$ n'est pas le sous-groupe trivial $\{1\}$ il est alors d'un des deux types suivants :

— l'ensemble des éléments de M supérieurs à 1 strictement a un plus petit élément, noté b_0, que l'on déterminera, et alors $M = b_0^{\mathbb{Z}} = \{b_0^k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

— M est dense dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2° *Application.* On considère l'équation de Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Démontrer que $M = \{x + y\sqrt{2} ; x \text{ et } y \text{ dans } \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} > 0, x^2 - 2y^2 = 1\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{*+}$.

b) Démontrer que $]1, 2] \cap M = \varnothing$ et en déduire que M n'est pas du second type.

c) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation de Fermat.

2 CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

2.1 CORPS $\mathbb{C}$ DES MATRICES $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

2.1.1 Définition.

On appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels. Sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, on appelle $\mathbb{C}$ le sous-ensemble des matrices $M(a, b)$ de la forme :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pour tout a et pour tout b.

Quand il n'y a aucune ambiguïté, on écrit :

$$M(a, b) = M; \qquad M(a', b') = M'.$$

REMARQUE. — L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{U}$ des matrices des rotations vectorielles dans une base orthonormée fixée. Notons en outre que :

$$M(0, 0) = O_{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad M(1, 0) = I_{\mathcal{M}},$$

$O_{\mathcal{M}}$ et $I_{\mathcal{M}}$ étant respectivement la matrice nulle et la matrice unité de l'anneau $(\mathcal{M}, +, .)$ des matrices carrées d'ordre 2.

2.1.2 Le groupe ($\mathbb{C}$, +).

Pour toute matrice $M(a, b)$ et pour toute matrice $M(a', b')$, la restriction à $\mathbb{C}$ de la loi d'addition définie sur $\mathcal{M}$ donne :

$$M(a, b) + M(a', b') = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix},$$

soit : $$M(a, b) + M(a', b') = M(a + a', \quad b + b').$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est fermé pour la loi +.

D'autre part : $-M(a, b) = M(-a, -b)$,

donc : $(-M) \in \mathbb{C}$;

comme : $I_{\mathcal{M}} \in \mathbb{C}$,

il en résulte que ($\mathbb{C}$, +) est un groupe commutatif, sous-groupe de ($\mathcal{M}$, +). La loi + sur $\mathbb{C}$ est dite *loi induite* sur $\mathbb{C}$ par la loi + de $\mathcal{M}$.

REMARQUE. — On a démontré (Algèbre, Terminale C) qu'une partie non vide H d'un groupe (E, ⊥) est un sous-groupe si, et seulement si, pour tout x et pour tout y :

$$(x \in H \quad \text{et} \quad y \in H) \implies [(x \perp y^{-1}) \in H];$$

l'élément y^{-1} est le *symétrique de* y pour la loi ⊥ du groupe E.

EXERCICE. ■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

En utilisant la remarque précédente, démontrer que ($\mathbb{C}$, +) *est un sous-groupe de* ($\mathcal{M}$, +).

2.1.3 Le corps commutatif ($\mathbb{C}$, +, .).

■ La restriction à $\mathbb{C}$ de la loi multiplicative de l'anneau $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 entraîne, successivement pour tout couple (M, M') de matrices de $\mathbb{C}$:

$$M(a, b) \times M(a', b') = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix},$$

$$M(a, b) \times M(a', b') = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix},$$

soit : $$M(a, b) \times M(a', b') = M(aa' - bb', \quad ab' + a'b).$$

Il en résulte que le produit M × M′ est une matrice de $\mathbb{C}$.

La loi × sur $\mathbb{C}$, partout définie, est induite sur $\mathbb{C}$ par la loi × de l'ensemble $\mathcal{M}$. Cette loi de composition interne est visiblement commutative.

D'autre part, elle est nécessairement distributive par rapport à la loi additive du groupe $\mathbb{C}$ et la matrice M(1, 0) est la matrice unité de $\mathbb{C}$.

PROPRIÉTÉ / 1 **L'ensemble $\mathbb{C}$ a, pour les lois + et × des matrices carrées d'ordre 2, une *structure d'anneau commutatif unitaire*, structure induite par celle de $\mathcal{M}$.**

REMARQUES. — **1** Soit J = M(0, 1). Calculons J^2.

On obtient :

$$J^2 = M(-1, 0),$$

c'est-à-dire :

$$J^2 = -I.$$

2 On peut d'abord établir, si on le désire, que $\mathbb{C}$ a une *structure d'espace vectoriel de dimension* 2 sur $\mathbb{R}$, dont une base est $\{I, J\}$, et utiliser la décomposition :

$$M(a, b) = aI + bJ \quad (\text{n}^\circ\ 2.2.2).$$

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Soit une rotation vectorielle φ de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *soit une homothétie vectorielle* h_λ *et l'application* $f = \varphi \circ h_\lambda$. *Démontrer que la matrice de* f *est une matrice de* $\mathbb{C}$.

On a : $\quad M\,f = M\varphi \times Mh,$

soit : $\quad M\,f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $a^2 + b^2 = 1,$

d'où : $\quad M\,f = M(a\lambda, b\lambda) = M(a'. b')$ avec $a'^2 + b'^2 = \lambda^2$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Soit J = M(0, 1).

1° *Démontrer que* $G = \{J.\ J^2,\ J^3.\ J^4\}$ *est un groupe multiplicatif.*

2° *Calculer* J^n, *pour n entier naturel, suivant les congruences de n, modulo* 4.

3° *Calculer directement la matrice unité. (On est amené à étudier sur* $\mathbb{R}$ *un système de deux équations.)*

4° *Calculer le produit :* $M(a, b) \times M(a, -b)$.

■ L'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps si, et seulement si, toute matrice $M(a, b)$ non nulle est inversible, c'est-à-dire si, et seulement si, le déterminant de la matrice $M(a, b)$ est non nul (Aleph$_0$, Géométrie 1ère CDE, n° **4.3.5**).

On note M^{-1} la matrice inverse.

On a, pour tout couple (a, b) fixé et différent du couple $(0, 0)$:

$$\text{Dét } M(a, b) = a^2 + b^2,$$

d'où : $$\text{Dét } M(a, b) \neq 0.$$

PROPRIÉTÉ / 2 **Toute matrice de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ est inversible.**

■ CALCUL DE $M^{-1}(a, b)$.

Une matrice M de $\mathbb{C}^*$ étant fixée, déterminons sa matrice inverse M^{-1}.

Soit : $$M(x, y) = M^{-1}(a, b).$$

On a successivement :

$$M(a, b) \times M(x, y) = M(1, 0),$$

$$M(ax - by, ay + bx) = M(1, 0).$$

Il en résulte sur $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$, on peut écrire :

$$\boxed{M^{-1}(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \times M(a, -b)}$$

REMARQUE. — La matrice $M(a, -b)$ est appelée la *matrice transposée* de $M(a, b)$; si $a^2 + b^2 = 1$, on retrouve la matrice associée à la rotation vectorielle φ^{-1}.

EXEMPLES.

$$M^{-1}(3, 4) = M\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right); \quad M^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Les propriétés I et II permettent d'énoncer :

THÉORÈME / **Les restrictions de l'addition et de la multiplication des matrices carrées d'ordre 2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices carrées $M(a, b)$ d'une structure de corps commutatif.**

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

L'ensemble $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, muni des lois $+$, $\times$ des lois des congruences, est un corps commutatif. On a $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Combien de matrices du type $M(\bar{a}, \bar{b})$ peut-on construire ? Soit $\mathbb{C}_K$ l'ensemble des matrices obtenues. Démontrer que $\mathbb{C}_K$ est un corps commutatif. Calculer $M^{-1}(\bar{2}, \bar{1})$.

2.2 ESPACE VECTORIEL DE $\mathbb{C}$ SUR $\mathbb{R}$.

2.2.1 Le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (Aleph$_0$, Géométrie 1° CDE, n° **4.1.5**).

Le sous-ensemble $\mathbb{C}$ est **non vide**; la restriction à $\mathbb{C}$ de la loi de composition externe notée ., définie sur $\mathcal{M}$, à opérateurs dans $\mathbb{R}$, permet d'écrire :

$$(\forall_{\mathbb{R}}\lambda), (\forall_{\mathbb{C}}\mathrm{M}) \qquad \lambda.\mathrm{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a\lambda & -b\lambda \\ b\lambda & a\lambda \end{pmatrix},$$

soit, pour tout élément M de $\mathbb{C}$:

$$\lambda\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(a\lambda, \quad b\lambda). \tag{1}$$

La matrice $\lambda\mathrm{M}(a, b)$ est élément de $\mathbb{C}$.

D'autre part $\mathbb{C}$ a une structure de groupe additif.

$\mathbb{C}$, **non vide**, est **stable** pour l'addition matricielle et pour la multiplication par un scalaire. On énonce :

PROPRIÉTÉ / $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2.

EXERCICES.

■ EXERCICES D'APPLICATION IMMÉDIATE.

I. *Soit le corps* $\mathrm{K} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. *On prend, comme corps commutatif des scalaires,* K *lui-même. Combien l'espace vectoriel des matrices* $\mathrm{M}(\bar{a}, \bar{b})$ *sur* K *a-t-il de vecteurs? Trouver des sous-espaces vectoriels de* K.

II. *On considère l'ensemble* M *des matrices carrées d'ordre* 2 *de la forme :*

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & 3b + a \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels fixés.

1° *La matrice est-elle inversible? Démontrer que* M *est un sous-corps commutatif du corps des matrices carrées d'ordre* 2.

2° *Démontrer que* M *est un sous-espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}$ *des matrices carrées d'ordre* 2. *Indiquer une base* $\{\mathrm{I}, \mathrm{V}\}$ *de ce sous-espace vectoriel.*

3° *On considère les matrices* U *dont le déterminant est égal à* 1. *Établir qu'elles forment un groupe multiplicatif commutatif. Forment-elles un sous-espace vectoriel de* M*?*

2.2.2 Base et dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1 Posons $M(1, 0) = I_{\mathbb{C}} = I$ et $M(0, 1) = J$. Pour tout couple (a, b) de réels, c'est-à-dire pour toute matrice $M(a, b)$, on a :

$$M(a, b) = a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

ou :

$$\boxed{\forall_{\mathbb{C}} M \qquad M(a, b) = aI + bJ}$$

Cette relation exprime que le système $\{I, J\}$ est un **système générateur** de $\mathbb{C}$.

2 Montrons que $\{I, J\}$ est une partie libre. Soit α et β deux nombres réels tels que, O étant la matrice nulle de $\mathbb{C}$:

$$\alpha I + \beta J = O \quad \text{et} \quad M(0, 0) = O.$$

Comme : $\alpha I + \beta J = M(\alpha, \beta)$, il en résulte que :

$$M(\alpha, \beta) = M(0, 0) \iff (\alpha, \beta) = (0, 0).$$

Tout élément $M(a, b)$ de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique :

$$\boxed{M(a, b) = aI + bJ; \quad I = M(1, 0), \; J = M(0, 1)}$$

On énonce :

THÉORÈME / **Les matrices I et J forment une base de $\mathbb{C}$, et $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.**

REMARQUE. — Les matrices I et J appartiennent au sous-ensemble $\mathbb{U}$ des matrices des rotations vectorielles.

EXERCICE.

■ EXERCICE RÉSOLU.

En utilisant la base $\{I, J\}$, *calculer :* $M(a, b) \times M(a', b')$.

Pour tout couple (a, b) et pour tout couple (a', b') on a :

$$M = aI + bJ, \qquad M' = a'I + b'J,$$

soit :

$$M.M' = (aI + bJ)(a'I + b'J),$$

$$MM' = aa'I^2 + (ab' + a'b)\,IJ + bb'J^2;$$

or :

$$I^2 = I, \qquad IJ = JI = J, \qquad J^2 = -I,$$

d'où :

$$MM' = (aa' - bb')\,I + (ab' + a'b)\,J.$$

2.2.3 Isomorphisme de $\mathbb{R}$ et d'un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{C}_1$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dont les éléments sont les matrices $M(a, 0)$: f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}_1$.

2 L'ensemble $\mathbb{C}_1$ contient, en particulier :

$$M(1, 0) = I, \quad M(0, 0) = O;$$

il est **non vide**; d'autre part, $\mathbb{C}_1$ est **stable** pour les lois induites sur lui-même, par les deux lois de composition internes définies sur $\mathbb{C}$:

$$M(a, 0) + M(a', 0) = M(a + a', 0),$$
$$M(a, 0) \times M(a', 0) = M(aa', 0);$$

il en résulte que $(\mathbb{C}_1, +, .)$ est un **sous-corps commutatif** de $(\mathbb{C}, +, .)$.
On a :

$$\forall_{\mathbb{C}_1} M \quad -M(a, 0) = M(-a, 0),$$

$$\forall_{\mathbb{C}_1^*} M \quad M^{-1}(a, 0) = M\left(\frac{1}{a}, 0\right), \quad \mathbb{C}_1^* = \mathbb{C}_1 - \{O\}.$$

REMARQUE. — On pourra établir, à titre d'exercice, la propriété suivante.

Une partie H, non vide, d'un corps K est un sous-corps de K si, et seulement si :

$$(x \in H \text{ et } y \in H) \implies [(x - y) \in H \text{ et } xy \in H],$$

et : $$x \in H^* \implies x^{-1} \in H^*, \quad H^* = H - \{0\}.$$

3 Étudions le comportement de la bijection f vis à vis des structures des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}_1$.

Pour tout a et pour tout a', réels :

$$f(a) + f(a') = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix},$$

$$f(a) + f(a') = \begin{pmatrix} a + a' & 0 \\ 0 & a + a' \end{pmatrix},$$

soit : $$\mathbf{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{a}') = \mathbf{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'). \quad (1)$$

D'autre part, pour tout λ réel, non nul, pour tout $\boldsymbol{a}$ et pour tout $\boldsymbol{a}'$ non nuls, on obtient :

$$\mathbf{f}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda\, \mathbf{f}(\boldsymbol{a}); \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{a}).\mathbf{f}(\boldsymbol{a}') = \mathbf{f}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'). \quad (3)$$

CONCLUSIONS. — 1 Les relations (1) et (2) expriment que la bijection **f** est une *application linéaire* et, par suite, un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2 Les relations (1) et (3) expriment que **f** est un *isomorphisme du corps des réels* $\mathbb{R}$ *sur le sous-corps* $\mathbb{C}_1$ *des matrices du type :*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}.$$

■ CONSÉQUENCES.

1 **Le corps $\mathbb{R}$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$.**

2 Il est alors légitime d'**identifier** tout **réel** a à la **matrice** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire d'**identifier** $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}_1$.

Le corps $\mathbb{C}$ est un « *sur-corps* » de $\mathbb{R}$.

Il en résulte, en particulier, que :

$$1 \text{ est identifié à } \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$-1 \text{ est identifié à } -\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, si on appelle J la matrice $\mathrm{M}(0; 1)$, on a :

$$\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où : $$\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I};$$

par suite, -1 est identifié à la matrice J^2.

PROBLÈME

2.1 ***Étude d'un sous-ensemble des matrices carrées d'ordre 2.***

I. **A tout élément (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on associe la matrice $M(x, y)$ telle que :**

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix}.$$

1° Démontrer que l'ensemble $\mathcal{M}(2, -2)$ de ces matrices est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, des matrices carrées d'ordre 2. En donner une base simple et préciser sa dimension. Démontrer que cet espace vectoriel est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2° Démontrer que $\mathcal{M}(2, -2)$ a une structure de corps K commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices. Trouver un élément A de $\mathcal{M}(2, -2)$ tel que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II. **On considère l'ensemble $\mathcal{M}(p, q)$ des matrices à termes réels a et b telles que :**

$$M(p, q) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a + pb \end{pmatrix},$$

les réels p et q étant fixés.

1° Reprendre la question (I. 1°).

2° Démontrer que $\mathcal{M}(p, q)$ est un anneau commutatif unitaire pour les lois habituelles.

3° Démontrer que, si l'on a : $p^2 - 4q < 0$, l'ensemble $\mathcal{M}(p, q)$ a une structure de corps.

III. **On considère à nouveau le corps K de la question I. Trouver un isomorphisme de corps entre K et $\mathbb{C}$.**

2.3 NOMBRES COMPLEXES

2.3.1 La notation $z = a + ib$.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. D'où, pour toute matrice $M(a, b)$ dans la base $\{I, J\}$, on a :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

et cela d'une **manière unique.**

L'isomorphisme f a permis d'identifier :

$$a \text{ et } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad b \text{ et } \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Posons $J = i$. On a, sur $\mathbb{C}$:

$$i^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

il en résulte que l'on peut, dans $\mathbb{C}$, poser :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

2 L'identification précédente permet d'écrire toute matrice $M(a, b)$ sous la forme :

$$M(a, b) = a + ib \text{ et } i^2 = -1.$$

On écrira désormais :

$$\boxed{z = a + ib \quad \text{et} \quad i^2 = -1, \quad a \quad \text{et} \quad b \quad \text{réels}}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est alors appelé **ensemble des nombres complexes**; chaque nombre complexe est noté $z = a + ib$, et cela d'une **manière unique**. Une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est alors : $\{1, i\}$.

3 La composante a est appelée la **partie réelle** de z notée $\mathfrak{R}(z) = a$ et la composante b est appelée la **partie imaginaire** de z, notée $\mathfrak{J}(z) = b$.

Si $b = 0$: $z = a$ est un nombre réel. z appartient au sous-corps $\mathbb{R}$ du corps $\mathbb{C}$.

Si $a = 0$: $z = ib$ est dit *imaginaire pur*.

EXEMPLE.

$i = 0 + i$: i est imaginaire pur.

$i^2 = -1$: i^2 est un réel.

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION, IMMÉDIATE.

I. *Démontrer que* $\{i\}$ *engendre le groupe multiplicatif :*

$$G = \{+1, i, -1, -i\},$$

et que $\{i\}$ *engendre un groupe fini multiplicatif.*

II. *Démontrer que* G *est isomorphe à un sous-groupe des rotations vectorielles, que l'on précisera.*

2.3.2 Opérations sur les nombres complexes.

Il résulte de l'identification précédente que toutes les propriétés et les résultats obtenus au cours de l'étude de l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices $M(a, b)$ permettent d'obtenir des propriétés pour les nombres complexes écrits sous la forme :

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad i^2 = -1,$$

cette forme étant dite *normale* ou *cartésienne*.

On obtient aisément les implications :

$$(z = z') \iff (a, b) = (a', b'),$$
$$(z = 0) \iff (a, b) = (0, 0).$$

Les opérations :

$$M + M' = (a + a')\,I + (b + b')\,J$$
$$M.M' = (aa' - bb')\,I + (ab' + a'b)\,J$$
$$M^{-1}(a, b) = \frac{a}{a^2 + b^2}\,I - \frac{b}{a^2 + b^2}\,J$$

et :

$$M \neq O \iff (a^2 + b^2 \neq 0)$$
$$\lambda M(a, b) = M(\lambda a, \lambda b)$$

sont respectivement traduites pour tout z et z' par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$
$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$
$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{1}{z}$$
$$\iff z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$
$\lambda z = a\lambda + ib\lambda$, pour tout λ réel

Il suffit, pour obtenir ces résultats, d'appliquer les règles de calcul sur un corps et de tenir compte du fait que $i^2 = -1$.

Par exemple :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i^2bb' + i(ab' + a'b),$$
$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

EXEMPLES. Voici quelques exemples de calcul numérique.

I. *On donne :* $z = 3 + 4i$, $z' = 2 - 3i$. *Calculer :*

$$z + z', \quad zz', \quad \frac{1}{z}, \quad z^2, \quad \frac{z'}{z}.$$

On obtient : $z + z' = 5 - i$; $zz' = 18 - i$;

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25} i; \quad \frac{z'}{z} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25} i.$$

La calcul du quotient $\dfrac{z'}{z}$ sera repris au n° **2.3.5**.

II. *Calculer :* $(1 + i)^2, (1 - i)^2, (1 + i)^3, \dfrac{1 + i}{1 - i}$.

On obtient successivement :

$$(1 + i)^2 = 2i; \quad (1 - i)^2 = -2i;$$
$$(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i;$$
$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

III. *Factoriser, sur* $\mathbb{C}$, *les expressions :* $z^2 + 4$; $z^3 - 1$.

On a : $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$;

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$$

Plus généralement, $(z + 1)^n$ se développe en utilisant la formule du binome de Newton qui est valable dans tout anneau commutatif.

EXERCICES.

■ EXERCICES RÉSOLUS.

I. *Calculer de deux façons* $(1 + i)^7$ *et en déduire la valeur de :*

$$S_1 = 1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6,$$

et de : $S_2 = C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7.$

On a : $(1 + i)^7 = (1 + i)^6(1 + i)$

$$= [(1 + i)^2]^3(1 + i),$$

d'où : $(1 + i)^7 = 8i^3(1 + i)$

$$= -8i(1 + i).$$

$$(1 + i)^7 = 8 - 8i.$$

Développons $(1 + i)^7$.

On obtient :

$$(1 + i)^7 = 1 + C_7^1 i + C_7^2 i^2 + C_7^3 i^3 + C_7^4 i^4 + C_7^5 i^5 + C_7^6 i^6 + C_7^7 i^7.$$

Compte tenu de :

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i.$$

il vient : $(1 + i)^7 = (1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6) + i(C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7),$

soit, d'après $(1 + i)^7 = 8 - 8i$:

$$1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6 = 8 \quad \text{et} \quad C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7 = -8.$$

II. *Démontrer que* $\mathfrak{B} = \{1 - i, 1 + i\}$ *est une base de* $\mathbb{C}$ *et exprimer, dans cette base :*

$$z = 3 + i.$$

Soit α et β deux nombres réels tels que, sur $\mathbb{C}$:

$$\alpha(1 - i) + \beta(1 + i) = 0.$$

On a : $(\alpha + \beta) + i(\beta - \alpha) = 0 \iff (\alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \beta - \alpha = 0),$

d'où : $(\alpha, \beta) = (0, 0).$

$\mathfrak{B}$ est une partie libre; comme $\mathbb{C}$ est de dimension 2, $\mathfrak{B}$ est une base (Aleph$_0$, Géométrie 1° CDE, n° **2.3.4**).

On peut donc écrire :

$$3 - i = a(1 - i) + b(1 + i),$$

$$3 - i = (a + b) + i(b - a) \iff (a + b = 3 \quad \text{et} \quad b - a = 1).$$

d'où : $(a, b) = (2, 1),$

et : $3 - i = 2(1 - i) + 1(1 + i).$

Opérer de même avec $z' = 2 + 3i$.

2.3.3 L'équation $z^2 = a$, a réel.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un sur-corps de $\mathbb{R}$ dans lequel on a :

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i);$$

les nombres i et $-i$ sont donc solutions de l'équation définie par :

$$z^2 + 1 = 0.$$

D'une façon générale, l'équation définie par $z^2 = a$, où a est un réel non nul, a-t-elle au moins une solution dans $\mathbb{C}$?

1 Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ une solution; on a :

$$(x_1 + iy_1)^2 = a \iff \begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = a \\ 2x_1y_1 = 0. \end{cases}$$

(Ce système est à résoudre sur $\mathbb{R}$.)

Par suite, on obtient :

a) $x_1 = 0 \implies y_1^2 = -a$, ce qui implique a inférieur à zéro; on obtient :

$$z_1' = i\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad z_1'' = -i\sqrt{-a};$$

b) $y_1 = 0 \implies x_1^2 = a$; alors, $z^2 = a$ n'a de solutions que pour a strictement positif ou nul; on obtient :

$$z_1' = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad z_1'' = -\sqrt{a}.$$

La réunion de ces deux cas entraîne que, pour tout réel a, l'équation en z a pour solutions :

$$\text{si } a > 0 : \quad \{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\};$$
$$\text{si } a < 0 : \quad \{-i\sqrt{-a},\ i\sqrt{-a}\}.$$

2 Il n'existe pas d'***autre solution*** car, si z_1 est une solution de $z^2 = a$, $-z_1$ en est une autre; d'où :

$$z^2 - a = 0 \implies z^2 - z_1^2 = 0$$
$$\iff (z - z_1)(z + z_1) = 0$$
$$\implies z = z_1 \quad \text{et} \quad z = -z_1,$$

car $\mathbb{C}$ étant un *corps*, n'a pas de *diviseur de zéro*.

Il importe de bien se rappeler que z est un **nombre, élément d'un corps commutatif** et que beaucoup de calculs se font sans **expliciter z sous la forme $a + ib$**, a et b réels.

2.3.4 Nombres complexes conjugués.

DÉFINITION / Le *conjugué* du nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont des réels, est par définition le nombre complexe noté :

$$\bar{z} = a - ib.$$

Ainsi :

$$z = 3 + 4i \implies \bar{z} = 3 - 4i;$$
$$z = i \implies \bar{z} = -i.$$

■ PROPRIÉTÉS.

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z, fait correspondre son conjugué $\bar{z}$.

L'application φ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ qui laisse invariant tout nombre réel a, car :

$$\bar{a} = a.$$

Première propriété. — On a :

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib;$$

il en résulte :

$$\boxed{\bar{\bar{z}} = z} \qquad (P_1)$$

L'application φ est une *involution* de $\mathbb{C}$.

Deuxième propriété. — On a :

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')},$$

Soit :

$$\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib');$$

il en résulte, pour tout z et tout z' :

$$\boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'} \qquad (P_2)$$

Troisième propriété. — On a :

$$\overline{zz'} = (aa' - bb') + i(ab' - a'b)$$
$$= (aa' - bb') - i(ab' - a'b),$$

soit :

$$\overline{zz'} = (a - ib)(a' - ib');$$

il en résulte, pour tout z et tout z' :

$$\boxed{\overline{zz'} = \bar{z}.\overline{z'}} \qquad (P_3)$$

En conclusion, on obtient sur $\mathbb{C}$ les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z'), \\ \varphi(zz') = \varphi(z).\varphi(z'), \\ \varphi(z) = \varphi^{-1}(z). \end{cases}$$

La bijection $z \longmapsto \bar{z}$ est donc un *automorphisme involutif* du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Quatrième propriété. — Pour tout élément z de $\mathbb{C}^*$, on a :

$$z \times \frac{1}{z} = 1,$$

il résulte de l'étude précédente que l'on a :

$$\overline{z \times \frac{1}{z}} = 1,$$

et, d'après la propriété P_3 :

$$\bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \implies \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}},$$

soit :

$$\boxed{\overline{(z^{-1})} = \bar{z}^{-1}} \qquad (P_4)$$

Cette relation entraîne :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \quad \varphi\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z')}.$$

Remarque. — Les propriétés P_2 et P_3 se généralisent aisément par récurrence sur n. On a :

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k ; \qquad \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \bar{z}_k$$

et, en particulier, pour tout entier n relatif :

$$\boxed{\overline{z^n} = (\bar{z})^n}$$

2.3.5 Applications.

■ *Calcul d'un quotient.*

On a, si $z = a + ib$:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib),$$

$$\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2}$$

Le produit $z\bar{z}$ est un *nombre réel*, strictement positif, si z est différent de zéro. Par suite :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2}\bar{z}.$$

On retrouve ainsi l'inverse de z :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

EXEMPLE. *Calculer le quotient :* $\frac{3 - i}{2 + 3i}$.

On a : $$\frac{(3 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{(3 + i)(2 - 3i)}{13},$$

soit : $$\frac{3 - i}{2 + 3i} = \frac{9}{13} - \frac{7i}{13}.$$

■ *Polynomes à coefficients réels.*

Soit P une fonction polynome définie sur $\mathbb{C}$, à coefficients réels, et soit $P(z)$ le polynome associé :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_n z^n,$$

où n est un entier naturel.

En appliquant les propriétés de l'application $z \longmapsto \bar{z}$ et en écrivant :

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k,$$

on obtient, du fait que, pour tout k, a_k appartient à $\mathbb{R}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_{1}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{1}^{n} a_k \bar{z}^k,$$

soit : $$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

Conséquence. — S'il existe un nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$, alors :

$$\overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0) = 0.$$

Si z_0 est réel : $z_0 = \bar{z}_0$;

mais, si z_0 est un nombre complexe tel que : $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors :

$$\bar{z}_0 \neq z_0.$$

On obtient donc un *autre* nombre complexe tel que $P(z) = 0$.

Les nombres complexes z_0 et $\bar{z}_0$ sont des *zéros* du polynome $P(z)$.

EXEMPLES. I. Soit :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a : $$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0,$$

soit : $$j^2 + j + 1 = 0;$$

j est un zéro de $P(z) = z^2 + z + 1$; par suite, $\bar{j}$ est aussi un zéro de $z^2 + z + 1$, avec $\bar{j} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(On vérifiera en calculant $\bar{j}^2 + \bar{j} + 1$.)

II. Soit, sur $\mathbb{C}$, le polynome défini par :

$$Q(z) = z^4 + z^2 + 1.$$

On remarque : $$Q(-z) = Q(z).$$

Calculons : $$Q(j) = j^4 + j^2 + 1.$$

On obtient aisément $j^3 = 1$, d'où :

$$Q(j) = j + j^2 + 1,$$

soit : $$Q(j) = 0.$$

Par conséquent, j étant un zéro du polynome $Q(z)$, à coefficients réels, $-j$, $\bar{j}$, $-\bar{j}$ sont aussi des zéros de $Q(z)$.

Soit $E = \{j, -j, \bar{j}, -\bar{j}\}$ l'ensemble des zéros ; on a :

$$(x - j)(x + j)(x - \bar{j})(x + \bar{j}) = [(x - \bar{j})(x - j)]\,[(x + j)(x + \bar{j})]$$

et, en utilisant le fait que les nombres $\bar{j}j$ et $j + \bar{j}$ sont des réels, on obtient :

$$[x^2 - x(j + \bar{j}) + \bar{j}j]\,[x^2 + x(j + \bar{j}) + j\bar{j}] = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1);$$

or : $$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

On a ainsi obtenu la décomposition du polynome en un produit de deux polynomes à coefficients réels.

REMARQUES. — **1** Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, sous forme cartésienne ; on a :

$$\bar{z} = x - iy,$$

$$z + \bar{z} = 2x \iff \mathfrak{R}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

et :
$$z - \bar{z} = 2iy \iff \mathfrak{I}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

2 *Il en résulte :*

a) Un nombre complexe est *réel* si, et seulement si :

$$\mathfrak{I}(z) = 0 \iff z = \bar{z}.$$

b) Un nombre complexe est *imaginaire pur* si, et seulement si :

$$\mathfrak{R}(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0.$$

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer les nombres complexes z tels que le nombre $z' = (z - 2)(\bar{z} + i)$ soit un nombre réel.

On a :
$$\bar{z}' = (\bar{z} - 2)(z - i).$$

Par suite, z' est réel si, et seulement si :

$$(z - 2)(\bar{z} + i) = (\bar{z} - 2)(z - i);$$

d'où :
$$z\bar{z} + iz - 2\bar{z} - 2i = \bar{z}z - i\bar{z} - 2z + 2i.$$

soit :
$$2(z - \bar{z}) + i(z + \bar{z}) - 4i = 0,$$

et, en écrivant $z = x + iy$:

$$4iy + 2ix - 4i = 0,$$

$$2i(2y + x - 2) = 0 \iff 2y + x - 2 = 0.$$

Pour tout y réel, les nombres z sont de la forme :

$$z = (2 - 2y) + iy.$$

REMARQUES. — **1** En posant $z = x + iy$, on peut aussi calculer z sous la forme $z' = x' + iy'$ et écrire : $\mathfrak{I}(z') = 0$.

On a :
$$z' = [(x - 2) + iy][x - i(y + 1)].$$

On achève le calcul et on vérifie le résultat précédent.

2 On peut également déterminer z pour que z' soit imaginaire pur.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

En vous inspirant des exemples I *et* II *précédents, étudier la décomposition du polynome défini par :* $x \longmapsto x^8 + x^4 + 1$.

EXERCICES

2.2 Démontrer par récurrence sur n, entier naturel, que :

$$(1 + i)^{4n} = (-4)^n.$$

Calculer : $(1 - i)^{42}$.

Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} i^k$, pour tout entier naturel n. Différencier les valeurs suivant les congruences de n, modulo 4.

2.3 On donne : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer :

a) $j^2, j^3, j^2 + j + 1, j^n$, n étant un entier naturel;

b) $(a + b + c)(aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c)$, a, b, c étant des réels.

2.4 Démontrer que $\{1, j\}$, pour $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, est une base de $\mathbb{C}$. Exprimer tout nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) sous la forme $z = u + jv$ où u et v sont des réels.
Exprimer u et v en fonction de x et de y, et réciproquement. Calculer, en fonction de u et de v, le carré du module de $z = u + jv$. Exprimer, sous la forme $p + jq$, les nombres complexes suivants :

$$\bar{z}, \text{ conjugué de } z = u + jv ; \frac{1}{z}.$$

2.5 On considère, dans $\mathbb{C}$, le sous-ensemble A des nombres complexes $\alpha = a + ib$, a et b étant des entiers relatifs. Démontrer que A a une structure d'anneau commutatif unitaire. Quels sonts les éléments inversibles ?

2.6 Effectuer les calculs suivants :

a) $(3 + i)^2$; $(3 - i)^2$; $(3 - i)^3$; $(3 - 2i)^3$;

b) $(4 - 5i)(6 + 3i)$; $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$; $(-4 + i\sqrt{5})^3$.

2.7 1° Démontrer que, si $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $j^2 + j + 1 = 0$. Calculer j^3.

2° *a*) Déterminer les coefficients réels λ et μ, tels que le polynome défini par :

$A(x) = \lambda(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 - (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + \mu(x^2 + 1)^4$

soit divisible par le polynome défini par $B(x) = x^2 + x + 1$.

b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel m pour que le polynome défini par :

$$C(x) = x^{6m+2} + x^{3m+1} + 1$$

soit divisible par le polynome défini par $B(x) = x^2 + x + 1$.

2.8 Déterminer deux réels a et b tels que, pour $z = 1 + i$, la fonction polynome définie par :

$$z \longmapsto z^7 + az^5 + b,$$

prend la valeur zero.

2.9 Au nombre complexe $z = a + ib$, on associe la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Le produit $M(z).M(z')$ est l'associé d'un nombre complexe u noté $z * z'$. On définit ainsi sur l'ensemble $\mathbb{C}$ une loi qui, à z, z', associe un nombre u.

1° Démontrer que l'opération notée $*$ est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition habituelle des nombres complexes.

2° Soit $u = c + id$ et $v = c' + id'$ deux nombres complexes fixés. Résoudre et discuter sur $\mathbb{C}$ l'équation définie par :

$$u * z = v.$$

3° Déterminer les solutions éventuelles de l'équation définie par $z * z = v$, où v est un nombre complexe fixé.

2.10 On considère les applications $f(a, b)$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, telles que :

$$f(a, b)(z) = az + b = z',$$

où a est tel que : $a \in \{1, i, -1, -i\}$ et $b = p + iq$ avec : $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que l'ensemble G des applications $f(a, b)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

2.11 Soit $\vec{E}_2$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Sur $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$, on définit les deux lois notées $+$ et $.$ et exprimées par :

$$\forall(x_1, y_1), \quad \forall(x_2, y_2) \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$\forall(x, y), \quad \forall(a + ib) \qquad (a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx). \tag{2}$$

1° Démontrer que $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$ a, pour les lois ainsi définies, une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note $\hat{E}$ cet espace vectoriel.

2° Démontrer que l'application φ de $\vec{E}_2$ vers $\hat{E}$:

$$\forall_{\vec{E}_2} x, \; x \longmapsto (x, 0)$$

est une bijection de $\vec{E}_2$ vers le sous-espace $\varphi < \vec{E}_2 >$ et que φ est compatible avec l'addition des vecteurs et avec la multiplication des vecteurs par un réel.

2.12 Calculer les nombres complexes suivants, c'est-à-dire les exprimer sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels :

1°

a) $\dfrac{i - 7}{3 + 7i} : \dfrac{2 + i}{3 - i} + \dfrac{3 - i}{2 + i}$;

b) $\dfrac{i - 7}{3 + 7i} + \dfrac{1 - i}{1 + i} : \dfrac{1 + 18i}{3 + 4i} + \dfrac{7 - 26i}{3 - 4i}$.

2°

a) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + i - 1 = z$. Calculer : $\bar{z} + \dfrac{1}{z}$.

b) $\dfrac{(1 + i)^3}{1 - i} + \dfrac{(1 - i)^4}{(1 + i)^2} : \left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{32}$.

2.13 Sachant que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer :

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}; \frac{1-i}{1-j^2}.$$

2.14 Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3} - 2}.$$

Calculer :

a) $z_1 + z_2$; $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$;

b) z_1^2, z_2^3; $z_1 + z_1^2 + z_2^3$;

c) $(z_1)^6 (z_2)^{12}$; $\frac{(z_1)^8}{(z_2)^3}$.

Expliciter z_1, z_2 et tous les autres résultats sous la forme la plus simple.

2.15 Calculer $Z = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$ avec $z = 3 - 2i$.

2.16 1° Démontrer, a priori, que l'expression :

$$(1+i)^n + (1-i)^n, \; n \text{ entier naturel,}$$

est un nombre réel.

Démontrer, de même, que l'expression :

$$(1+i)^n - (1-i)^n, \; n \text{ entier naturel,}$$

est un nombre imaginaire.

2° Développer : $(1+i)^n$. Démontrer que la partie réelle est la somme des termes tels que :

$$(-1)^p C_n^{2p},$$

la partie imaginaire étant la somme des termes tels que :

$$(-1)^p C_n^{2p+1}.$$

3° On pose :

$$\mathrm{f}(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 + \cdots + (-1)^p C_n^{2p} x^{2p} + \cdots.$$

$$\mathrm{g}(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^p C_n^{2p+1} x^{2p+1} + \cdots.$$

Chaque somme est finie, mais le dernier terme dépend de la parité de *n*. Calculer :

$$[\mathrm{f}(x)]^2 + [\mathrm{g}(x)]^2.$$

2.17 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les systèmes définis par :

a) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} (1+i)z + iz' = 2 - i \\ (2-i)z + (3-i)z' = 5 + 3i. \end{cases}$

2.18 Discuter et résoudre, sur $\mathbb{C}$, le système défini par :

$$\begin{cases} z\alpha + \bar{z}_1 \bar{\beta} = 1 \\ \bar{z}_1 \alpha + \bar{z}\beta = 0, \end{cases}$$

α et β étant des nombres complexes, non réels.

2.19 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, le système défini par :

$$\begin{cases} 3iz + z' = 8 + i \\ 2\bar{z} + i\bar{z}' = 1 + i. \end{cases}$$

(Ne pas utiliser la forme $z = x + iy$.)

2.20 Vérifier que $(z + 2i)$ est un facteur de :

$$P(z) = z^2 + (5 + 6i)\,z + 10i - 8.$$

Achever ensuite la factorisation.

2.21 1° Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$z = (1 + i)\,\bar{z} + 3 - 2i. \qquad (1)$$

Généraliser avec :

$$z = p\bar{z} + q,$$

p et q étant des nombres complexes.

(Prendre l'équation (1') obtenue en utilisant l'application $z \longmapsto \bar{z}$.)

2° Reprendre l'exercice en utilisant les formes :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy.$$

2.22 1° Quelle relation existe-t-il entre les réels x et y pour que le nombre $Z = \dfrac{z - 2}{z - 1}$, avec $\begin{cases} z = x + iy \\ z \neq 1 \end{cases}$ soit :

a) imaginaire pur ? *b*) réel ?

(Faire le calcul de deux façons différentes.)

2° Même question avec : $Z = \dfrac{z - 2}{z - 4i}$, $z \neq 4i$.

2.23 Quelle est la condition pour que $(a + ib^2)^3$ soit :

a) réel ?

b) imaginaire pur ?

2.24 1° Quelle est la condition pour que $(x + iy)^3$ soit réel et supérieur à 8 ?

2° Même question pour $(\sqrt{x} + i\sqrt{y})^6$.

2.4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.4.1 Norme et module.

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$. où a et b sont des réels, le produit $z\bar{z}$ est un nombre réel positif ou nul car :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Le nombre $z\bar{z}$ est appelé **norme** de z.

Lorsque z est un nombre réel, on a :

$$z\bar{z} = a^2,$$

et la valeur absolue du réel z est :

$$|z| = |a|.$$

DÉFINITION / D'une façon générale, sur $\mathbb{C}$, on appelle *module* ou *valeur absolue* de z le nombre réel positif ou nul noté $|z|$, tel que :

$$(|z|^2 = z\bar{z}) \iff |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EXEMPLES. $z = 3 - 4i \implies |z| = 5$;

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \implies |j| = 1; \quad |i| = 1.$$

- Il en résulte les propriétés immédiates suivantes :

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|;$$

$$(|z| = 0) \iff (z = 0).$$

- Les inégalités sur $\mathbb{R}$:

$$a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad b \leqslant |b| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$$

entraînent les relations :

$$\boxed{\mathfrak{R}(z) \leqslant |z|} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathfrak{J}(z) \leqslant |z|}$$

■ Par définition, on a :

$$|zz'|^2 = (zz') \times (\overline{zz'}).$$

D'autre part : $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$,

d'où : $|zz'|^2 = (zz') \times (\bar{z}.\bar{z}')$.

En utilisant les propriétés du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, on obtient :

$$|zz'|^2 = (z\bar{z})(z'\bar{z}'),$$

$$|zz'|^2 = |z|^2 \times |z'|^2,$$

soit sur $\mathbb{C}^*$:

$$\boxed{|zz'| = |z| \times |z'|}$$

L'application $z \longmapsto |z|$ est un homomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, .)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{+*}, .)$, dont le noyau est le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, .)$ des nombres complexes de module 1.

■ On a, d'autre part :

$$1 = \left|z \cdot \frac{1}{z}\right| = |z| \left|\frac{1}{z}\right|,$$

d'où : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$,

et, par suite : $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

On notera que :

$$|z| = \frac{1}{|z|} \implies |z| = 1.$$

On obtient, par récurrence sur n, les relations :

$$|z^n| = |z|^n, \quad |z^{-n}| = |z|^{-n}.$$

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer z tel que les nombres complexes z, $\frac{1}{z}$, $z - 1$ aient même module.

On a : $|z| = \frac{1}{|z|}$,

d'où : $|z| = 1$.

Il en résulte que : $|z - 1| = 1,$

soit : $(z - 1)(\overline{z - 1}) = 1,$

ou : $(z - 1)(\bar{z} - 1) = 1 \iff z\bar{z} = \bar{z} + z.$

Or : $|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1,$

d'où : $\bar{z} + z = 1.$

En posant $z = x + iy$, on a : $x = \frac{1}{2}$;

or : $x^2 + y^2 = 1.$

Il en résulte les deux solutions :

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Démontrer que, si λ est réel, le nombre complexe $z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$ *a pour module* 1. (*Calculer* $z\bar{z}$.)

2.4.2 Inégalité de Minkowski.

Cette inégalité, définie sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, se traduit par :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

On a, pour tout z et tout z' :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}'),$$

soit, en utilisant les règles de calcul sur le corps $\mathbb{C}$:

$$|z + z'|^2 = z\bar{z} + z'\bar{z}' + (z\bar{z}' + \bar{z}z'). \qquad (1)$$

on remarque : $\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}z',$

d'où : $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\Re(z\bar{z}');$

or : $2\Re(z\bar{z}') \leqslant 2\,|z\bar{z}'|,$

soit : $2\Re(z\bar{z}') \leqslant 2\,|z|\,|z'|,$

d'où, en majorant le deuxième membre de l'égalité (1) :

$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\,|z'|,$$

c'est-à-dire : $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$

La généralisation est immédiate; on obtient :

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Appliquer l'inégalité précédente à z et (z' − z), puis à z' et (z − z') pour établir que :

$$\Big| |z| - |z'| \Big| \leqslant \Big| z - z' \Big|.$$

2.4.3 Le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des complexes de module égal à un.

1 Soit $\mathbb{U}$, sous-ensemble de $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes de module égal à un :

$$\mathbb{U} = \{u \mid u \in \mathbb{C} \text{ et } |u| = 1\}.$$

Par exemple : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tout nombre u correspond à une matrice $M(a, b)$ telle que $a^2 + b^2 = 1$. Donc, $\mathbb{U}$ est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe des rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}_2$.

Montrons, directement, que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$. On a, pour tout u et pour tout u' de $\mathcal{U}$:

$$|u \,.\, u'| = |u| \times |u'| = 1.$$

L'ensemble $\mathbb{U}$ est **stable** pour la restriction de la loi multiplicative de $\mathbb{C}$. Cet ensemble, non vide, est d'ailleurs tel que, pour tout u et pour tout u' :

$$|u \,.\, u'^{-1}| = |u|\,|u'^{-1}| = |u| \times \frac{1}{|u'|} = 1,$$

ce qui établit que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$.

Remarquons que l'on a l'équivalence :

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \iff |z| = 1.$$

2 Tout nombre complexe $z = a + ib$, non nul, est tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Posons : $|z| = r$; r étant un réel strictement positif appartient aussi à $\mathbb{C}$. Pour *r fixé*, sur le corps $\mathbb{C}$, quel que soit z *non nul*, il existe un nombre u et un seul, tel que :

$$z = ru;$$

d'où : $\quad |z| = |ru| = |r|\,|u|,$

$$|z| = r\,|u|;$$

or, on a : $\quad |z| = r;$

il en résulte, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}^*$:

$$|u| = 1.$$

Réciproquement, si l'on a :

$$z = ru, \quad r \in \mathbb{R}^{*+} \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{U},$$

alors : $\quad |z| = |r|\,|u| = r \implies r = |z|.$

EXEMPLE. $\quad (z = 3 + 4i) \implies \left(|z| = 5\right)$ et $z = 5\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)$,

avec : $\quad \left|\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right| = 1.$

EXERCICE.

■ **EXERCICE RÉSOLU.**

Démontrer que $Z = \dfrac{z + u\bar{z}}{1 - u}$ ***est un nombre réel si*** $|u| = 1$ ***et*** $u \neq 1$, z ***étant un nombre complexe.***

Le nombre Z est réel si. et seulement si : $Z = \overline{Z}$;

d'où : $\quad \dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \dfrac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$, soit, successivement :

$$(z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) = (1 - u)(\bar{z} - \bar{u}z),$$

$$z + u\bar{u}\bar{z} = \bar{z} + u\bar{u}z.$$

$$(z - \bar{z})(1 - u\bar{u}) = 0.$$

Par suite, si z est différent de $\bar{z}$, c'est-à-dire si z n'est pas réel, alors on doit avoir :

$$u\bar{u} = 1 \iff |u| = 1.$$

Si z est réel, l'égalité est toujours réalisée par tout nombre complexe u.

EXERCICES

2.25 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

2.26 On considère, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$az^2 + b|z|^2 + ic = 0,$$

où a, b, c sont des réels.

Quelles conditions vérifient les nombres a, b, c si $z = 3 + 2i$ est une solution de l'équation ?

Déterminer (a, b, c) lorsque :

$$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \quad \text{et} \quad 0 < a < 15.$$

2.27 Soit a et b deux nombres complexes tels que :

$$|a| < 1 \quad \text{et} \quad |b| = 1.$$

Soit u le nombre complexe tel que :

$$u = b\,\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Démontrer que :

$$|u| \leqslant 1 \iff |z| \leqslant 1,$$

avec correspondance des égalités.

(On pourra calculer $1 - |u|^2$.)

2.28 Démontrer que l'égalité :

$$|z + z'| = |z| + |z'|$$

équivaut à l'existence d'un nombre positif ou nul λ, tel que $z' = \lambda z$.

Étudier de même l'égalité :

$$|z + z'| = |z| - |z'|.$$

2.29 Démontrer que l'application $\mathcal{N}$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^+$, définie par $z \longmapsto z\bar{z}$, est un homomorphisme de $(\mathbb{C}, .)$ vers $(\mathbb{R}^+, .)$ et que z est inversible dans $\mathbb{C}^+$ si, et seulement si $\mathcal{N}(z) = z\bar{z}$ est inversible dans $\mathbb{R}^{*+}$. En déduire le calcul de z', inverse de z.

2.30 1° Calculer le module de $z = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^8$.

2° Calculer le nombre complexe z tel que :

$$\left|\frac{z - 12}{z - 8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z - 4}{z - 8}\right| = 1.$$

2.31 Déterminer le nombre complexe z pour que :

$$|z^2| = |1 - z| = |\bar{z}|,$$

ou que :

$$|z - i| = |iz - i| = |z - iz|.$$

2.32 Soit : $u^2 = zz'$, où z et z' sont deux nombres complexes. Démontrer que :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} + u\right|.$$

2.33 Soit le nombre complexe $z = u + iv$, où u et v sont éléments de $\mathbb{C}$. Démontrer que l'on a $|z|^2 = |u|^2 + |v|^2$ si, et seulement si :

ou bien : $z = 0$,

ou bien : $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.34 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations définies par :

a) $|z| + z = 3 + 4i$;

b) $|z| - z = 4 - 3i$.

2.35 Démontrer que l'application $z \longmapsto \dfrac{z}{|z|}$ est un homomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

2.36 Soit $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U} - \{-1\}$ l'ensemble des nombres u complexes de module égal à 1; u est différent de -1. Démontrer que l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, définie par $x \longmapsto \dfrac{1 + ix}{1 - ix}$, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}_1$.

2.37 Démontrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel si $|z_1| = |z_2|$, où z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

2.38 Résoudre, sur $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module égal à 1, le système défini par :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1. \end{cases}$$

$\left(\text{Utiliser : } (z \in \mathbb{U}) \iff \bar{z} = \dfrac{1}{z}\cdot\right)$

2.5 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

2.5.1 Plan vectoriel et plan affine identifiés à $\mathbb{C}$.

Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

■ L'application f de P vers $\vec{P}$, définie par :

$$M \longmapsto f(M) = \vec{v} = \overrightarrow{OM},$$

est une bijection de P sur $\vec{P}$. Il en résulte que le plan P peut être muni d'une structure d'espace vectoriel par le choix du point O.

Nous noterons ce plan vectoriel : (P, 0).

Si O' est un point de P, la translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ est un isomorphisme des plans vectoriels (P, O) et (P, O').

La bijection g de $\vec{P}$ sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \longmapsto z = x + iy$$

est un isomorphisme du plan vectoriel $\vec{P}$ sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ qui associe les bases (e_1, e_2) et $(1, i)$ de ces espaces vectoriels.

On peut donc *identifier*, à l'aide de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{P}$ et $\mathbb{C}$.

On dit :

z est l'*affixe* de $\vec{v}$,

$\vec{v}$ est le *vecteur-image* de z,

ce que l'on note encore :

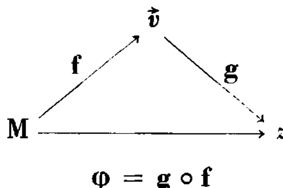
$$[\vec{v}] = z,$$

cette notation se lisant : « mesure complexe du vecteur $\vec{v}$ égale z ».

Remarque. — La norme du vecteur $\vec{v}$ est égale au module du nombre complexe $z = g(\vec{v})$:

$$|z| = \|\vec{v}\|.$$

■ L'application $\varphi = g \circ f$ telle que :



$$\varphi = g \circ f$$

composée de deux isomorphismes est un isomorphisme de P sur $\mathbb{C}$. On peut donc *identifier*, à l'aide du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, P et $\mathbb{C}$. On dit alors que P est le ***plan complexe***.

M étant un point et z un nombre complexe tels que :

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(M) = z,$$

on dit que : M est l'image de z,

et que : z est l'affixe de M.

On a : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Notons que : $\varphi(O) = 0, \quad \varphi(E) = 1, \quad \varphi(F) = i,$

avec : $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1$ et $\overrightarrow{OF} = \vec{e}_2$ (*fig. 1*).

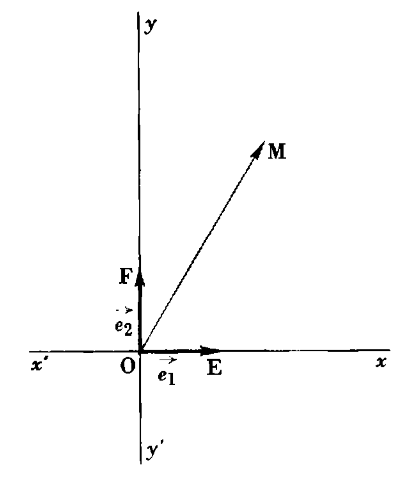
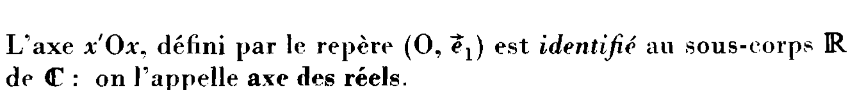


Fig. 1



L'axe $x'Ox$, défini par le repère $(O, \vec{e}_1)$ est *identifié* au sous-corps $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$: on l'appelle **axe des réels**.

L'axe $y'Oy$, défini par le repère $(O, \vec{e}_2)$ est *identifié* à l'ensemble J des nombres complexes de la forme $z = i\lambda$, λ réel : on l'appelle **axe des imaginaires ou axe des complexes**.



2.5.2 Interprétations géométriques.

■ L'isomorphisme g du plan vectoriel $\vec{P}$ sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ (ou l'isomorphisme φ de P sur $\mathbb{C}$) permet de transférer sur $\mathbb{C}$ des propriétés géométriques définies sur $\vec{P}$ (ou sur P).

Réciproquement, toute relation établie entre nombres complexes peut être interprétée dans $\vec{P}$, ou dans P.



EXERCICE. ■ EXERCICE RÉSOLU.

Étant donné deux nombres complexes distincts z_1 et z_2, d'images respectives M_1 et M_2, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait à la relation :

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k \qquad (k \text{ réel positif fixée}).$$

On a :

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k \iff \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k \iff \frac{\|\overrightarrow{MM_1}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|} = k.$$

L'ensemble des points M est le cercle, ensemble des points dont le rapport des distances à M_1 et à M_2 est égal à k.

Si $k = 1$, l'ensemble est la médiatrice du segment $[M_1, M_2]$ (*fig. 2*).

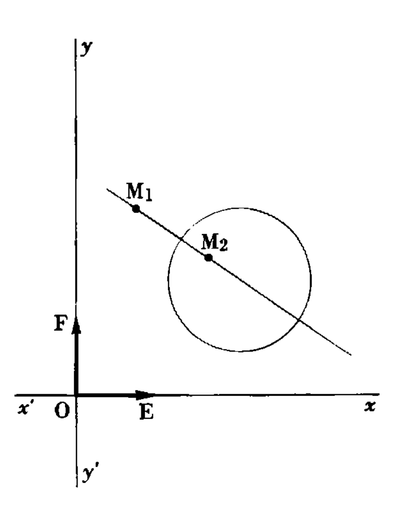
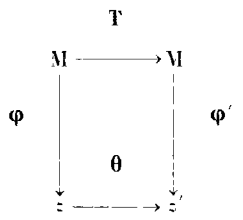


Fig. 2

■ Soit **T** une application du plan affine euclidien P vers lui-même: φ étant la bijection qui identifie le plan à $\mathbb{C}$, le schéma suivant :



définit une application θ, dite *transmuée* de **T** par φ, telle que :

$$\theta = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$$

$$T = \varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi.$$

■ Soit deux applications **T**, notées T_1 et T_2, et soit θ_1, θ_2 les transmuées correspondantes :

$$\theta_1 = \varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1}, \qquad \theta_2 = \varphi \circ T_2 \circ \varphi^{-1}.$$

Appelons θ la transmuée de $T_2 \circ T_1$ par φ :

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ T_1) \circ \varphi^{-1}.$$

ou, avec $\varphi^{-1} \circ \varphi = e_P$ (e_P est l'identité sur P) :

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ e_P \circ T_1) \circ \varphi^{-1},$$

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ T_1) \circ \varphi^{-1},$$

$$\theta = (\varphi \circ T_2 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1}).$$

soit : $$\theta = \theta_2 \circ \theta_1.$$

On peut donc composer les transmuées par φ de T_1 et de T_2 pour obtenir la transmuée de $T_2 \circ T_1$.

Remarquons, en particulier qu'à toute bijection **f** *de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{C}$ *correspond une bijection* **T** *du plan complexe, c'est-à-dire une transformation ponctuelle, et réciproquement.*

EXEMPLES. 1. Soit un nombre complexe fixé $z_1 = 2 - 3i$ et soit θ l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \longmapsto z' = z + z_1.$$

c'est une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.

D'après l'étude précédente, à la bijection θ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ correspond une bijection **T** du plan complexe P sur P.

Soit M et M′ les points d'affixes respectives z et z' et soit A le point d'affixe z_1. Posons $\overrightarrow{OA} = \vec{t}$.

On a : $$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{t} \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{t},$$

pour tout point M.

La bijection **T** de P sur P est la translation définie par le vecteur $\vec{t}$ d'affixe z_1.

L'*addition* sur $\mathbb{C}$ permet d'exprimer toute *translation* dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé et réciproquement.

II. L'*homothétie vectorielle* sur $\vec{P}$, définie par : $\vec{V}' = \lambda\vec{V}$, λ réel, s'exprime sur $\mathbb{C}$ par :

$$z' = \lambda z.$$

L'*alignement* des points A, B, M du plan P, d'affixes respectives a, b, z, donne l'équivalence :

$$(\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}) \iff [z - a = \lambda(b - a),\ \lambda \text{ réel}].$$

III. L'*isomorphisme* entre le plan euclidien P et $\mathbb{C}$ amène à exprimer sur $\mathbb{C}$ le *produit scalaire*.

Soit, dans (P, O) muni d'un repère orthonormé, le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}' = xx' + yy'.$$

On a, dans $\mathbb{C}$:

$$z = x + iy, \text{ affixe de } \overrightarrow{OM},$$

$$z' = x' + iy' \text{ affixe de } \overrightarrow{OM},$$

$$z\bar{z}' + \bar{z}z' = (x + iy)(x' - iy') + (x - iy)(x' + iy'),$$

$$z\bar{z} + \bar{z}z' = 2(xx' + yy'),$$

soit : $$\frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z') = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}';$$

or : $$z\bar{z}' = xx' + yy' + i(yx' - xy');$$

on a donc : $$\mathcal{R}(z\bar{z}') = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}^2 = z\bar{z}.$$

Application. — Soit, sur $\mathbb{C}$, la relation définie par :

$$z' = iz.$$

On a : $$z\bar{z}' = z(\overline{iz}) = -iz\bar{z};$$

or, $z\bar{z}$ est réel; d'où :

$$\mathcal{R}(z\bar{z}') = 0;$$

il en résulte que, sur (P, O), les vecteurs-images d'affixes respectives z et iz sont orthogonaux.

On peut d'ailleurs remarquer que :

si $z = x + iy$, alors $z' = -y + ix$, et les vecteurs $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{V}'\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux.

On a en effet : $\vec{V}.\vec{V}' = x(-y) + yx = 0.$

IV. D'autre part, à la *norme euclidienne* $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est associé le *module* de z, affixe de $\vec{V}$.

On a l'égalité :

$$\|\mathbf{MM}'\| = |z' - z|,$$

et l'équivalence :

$$\frac{\|\overrightarrow{MM_1}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|} = \frac{MM_1}{MM_2} = k \iff \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k.$$

2.5.3 La symétrie plane axiale.

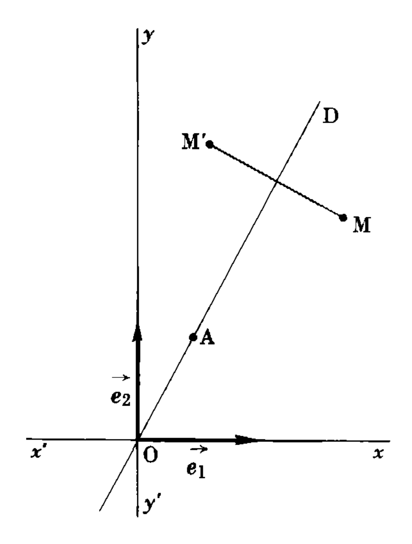


Fig. 3

Soit un plan affine euclidien P, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et identifié à $\mathbb{C}$ (*fig. 3*).

Soit M un point d'affixe z, D une droite de P contenant O, et dont un vecteur directeur unitaire est $\overrightarrow{OA}$, vecteur d'affixe a. Soit M' le symétrique de M par rapport à D, z' étant son affixe.

Le point M' est bien défini par les relations :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\| & (1) \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OA}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*. & (2) \end{cases}$$

Dans $\mathbb{C}$, on a donc :

$$\begin{cases} |z| = |z'| & (1') \\ z + z' = \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}. & (2') \end{cases}$$

Dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, pour tout z et pour tout z', il existe un couple unique (w, w') tel que :

$$z = aw \quad \text{et} \quad z' = aw';$$

la relation (2') donne :

$$a(w + w') = \lambda a \implies w + w' = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

comme $(w + w')$ est un réel, on a :

$$w + w' = \bar{w} + \bar{w}';$$

d'autre part : $|z| = |z'|$ entraîne $|w| = |w'|$,

ou, sur $\mathbb{C}^*$: $w'\bar{w}' = w\bar{w}$,

soit : $$\frac{w'}{\bar{w}} = \frac{w}{\bar{w}'} = \frac{w + w'}{\bar{w}' + \bar{w}} = 1,$$

d'où : $w' = \bar{w}$.

De la relation $z = aw$, on obtient :

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{a}},$$

et la relation $z' = a\bar{w}$ donne :

$$z' = \frac{a}{\bar{a}}\bar{z} = \frac{a^2}{a\bar{a}}\bar{z};$$

or : $a\bar{a} = 1,$

soit : $\boxed{z' = a^2 \bar{z}}$

Notons que : $\bar{z}' = (\bar{a})^2 z;$

d'où : $z = \dfrac{1}{(\bar{a})^2} \bar{z}';$

or, $|a| = 1$ entraîne :

$$\frac{1}{\bar{a}^2} = a^2 \quad \text{et} \quad z = a^2 \bar{z}' ;$$

il en résulte que la transformation est involutive.

REMARQUE. — En observant que :

$$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM'} . \overrightarrow{OA},$$

et en utilisant l'expression sur $\mathbb{C}$ du produit scalaire, il est possible de retrouver la relation $z' = a^2 \bar{z}$.

EXERCICES.

■ EXERCICES RÉSOLUS.

I. *Quel est, dans le plan affine euclidien, identifié à* $\mathbb{C}$, *l'ensemble* E *des points* M *tels que les points* A, M, M', *d'affixes respectives* 1, z, $1 + z^2$, *soient alignés.*

PREMIÈRE MÉTHODE. — L'hypothèse $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$, pour λ réel, se traduit dans $\mathbb{C}$ par :

$$(1 + z^2) - 1 = \lambda(z - 1),$$

$$z^2 = \lambda(z - 1),$$

soit, en posant $z = x + iy$:

$$x^2 - y^2 + 2ixy = \lambda(x - 1) + \lambda iy; \qquad (1)$$

en utilisant l'égalité des deux nombres complexes de la relation (1), on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \lambda(x - 1) \\ 2xy = \lambda y. \end{cases} \qquad (2)$$

On obtient :

a) $y = 0 \implies z \in \mathbb{R};$

solution évidente : $M \in x'Ox$.

b) $y \neq 0 \implies \lambda = 2x \implies x^2 - y^2 = 2x(x - 1)$:

on obtient l'équation du cercle Γ de centre $\omega(1, 0)$ et de rayon $r = 1$:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

et : $E = \Gamma \cup (x'Ox).$

SECONDE MÉTHODE. — On a :

$$z^2 = \lambda(z - 1),\ \lambda \text{ réel},$$

d'où : $\lambda(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2$,

et, pour λ réel non nul :

$$\lambda z^2(\bar{z} - 1) = \lambda \bar{z}^2(z - 1);$$

il en résulte : $z^2(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2(z - 1)$,

soit : $(z - \bar{z})(z\bar{z} - (z + \bar{z})) = 0$.

$$z = \bar{z} \iff z \text{ réel},$$

et : $z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Dans le même esprit, on peut écrire :

$$\frac{z^2}{z - 1} = \lambda \quad \text{et} \quad z \neq 1;$$

λ étant réel, d'après la remarque **2** *a*) du n° **1.3.5**, on a :

$$\frac{z^2}{z - 1} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z} - 1} \implies z^2(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2(z - 1);$$

on obtient ainsi l'équation du cercle Γ.

De même, on peut dire que, si $\dfrac{z^2}{z - 1}$ est réel, alors $Z = z^2(\bar{z} - 1)$ est réel; on remplace z par $x + iy$ et l'on écrit que la partie imaginaire de Z est nulle.

REMARQUE. — On peut, aussi, exprimer z sous la forme $z = x + iy$, et traduire dans (P, O) que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont linéairement indépendants.

Or : $z' = 1 + z^2 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy$;

par suite, $\overrightarrow{AM'}$ a pour composantes :

$$x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad 2xy,$$

et $\overrightarrow{AM}$ a pour composantes :

$$x - 1 \text{ et } y;$$

d'où :

$$D = \begin{vmatrix} x^2 - y^2 & x - 1 \\ 2xy & y \end{vmatrix} = y(x^2 - y^2) - 2(x - 1)xy = 0,$$

$$D = y(x^2 - y^2 - 2x^2 + 2x) = -y(x^2 + y^2 - 2x),$$

et l'on conclut de la même façon.

II. *En utilisant les résultats connus sur les rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien, établir la loi multiplicative des complexes de module égal à un.*

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe $\vec{P}$ et soit $\vec{V} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ un vecteur unitaire de $\vec{P}$. Il existe une rotation vectorielle φ, et une seule, telle que :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{V};$$

de même, il existe une rotation vectorielle unique φ' telle que :

$$\varphi'(\vec{e}_1) = \vec{V}', \quad \vec{V}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \|\vec{V}'\| = 1.$$

On a :

a) $\varphi(\vec{e}_1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $z = x + iy$ est l'affixe de $\vec{V}$:
b) $\varphi'(\vec{e}_1) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ et $z' = x' + iy'$ est l'affixe de $\vec{V}'$.

Composons $\varphi' \circ \varphi$:

$$(\varphi' \circ \varphi)(\vec{e}_1) = \varphi'(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\varphi'(\vec{e}_1) + y\varphi'(\vec{e}_2);$$

or : $\varphi'(\vec{e}_2) = -y'\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2$,

d'où : $(\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1 = x(x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) + y(-y'\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2)$,

$$(\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1 = (xx' - yy')\vec{e}_1 + (xy' + yx')\vec{e}_2.$$

Soit : $\vec{V}_1 = (\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1$:

à $\vec{V}_1$ est associé un nombre complexe z_1 ; à la loi de composition $\varphi' \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi$ est associé le produit commutatif :

$$zz' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx').$$

EXERCICES

Dans tous les exercices, on considère toujours le plan affine euclidien identifié à $\mathbb{C}$, muni d'un repère orthonormé.

C'est dans ce plan que l'on considère les points M d'affixe z.

2.39 Comparer, dans le plan P identifié à $\mathbb{C}$, les images respectives des nombres complexes : z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$.

2.40 Démontrer que les points A, B, C, dont les affixes respectives sont 1, j, j^2, sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Comment se traduit la somme : $1 + j + j^2$?

2.41 Quel est l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que les points d'affixes i, iz soient alignés avec M ? Le nombre complexe a étant fixé, comment choisir M pour que les points d'affixes a, az soient alignés avec M ?

2.42 Construire dans le plan complexe les images de z dans les cas suivants :

a) $z = (3 + 4i)(5 - 2i)$;

b) $z = \dfrac{4 + i}{1 - 5i}$.

2.43 Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points M d'affine z tels que :

a) $|z - 3i| = 5$;

b) $\dfrac{|z - i|}{|z + 2i|} = 2$;

c) $\dfrac{z - 2}{z - 6}$ a des composantes égales;

d) $\dfrac{1 + z}{\bar{z}}$ soit réel, soit imaginaire pur;

e) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;

f) $\dfrac{z - 2}{z - 6}$ soit imaginaire pur (on démontrera de plus qu'il existe un nombre complexe β, indépendant de z, tel que $\left|1 - \dfrac{\beta}{z}\right|$ soit indépendant de z, et on calculera β et $\left|1 - \dfrac{\beta}{z}\right|$.

2.44 On considère, sur $\mathbb{C}$, l'application f définie par $z \longmapsto 2z - \bar{z}$. Quelle est la transformation ponctuelle F associée à f ?
Quel est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $Z = 2iz^2 + (3 + 4i)z + 1 - i$ soit un nombre réel ?

2.45 Quel est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $Z = z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ soit un nombre réel ?

2.46 Soit t un nombre complexe, d'image P dans le plan identifié à $\mathbb{C}$. On pose $t = x + iy$ et l'on considère, sur $\mathbb{C}$, les fonctions suivantes :

$$t \longmapsto Z_1 = \frac{t^2}{t - 1};$$

$$t \longmapsto Z_2 = \frac{1}{t(t - 1)}.$$

Quels sont les ensembles respectifs des points P : si Z_1 est réel ? si Z_2 est réel ? si Z_2 est imaginaire pur ?

2.47 Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$, où a est un nombre complexe tel que $a = \alpha + i\beta$.

2.48 On considère le nombre complexe z tel que $z = \dfrac{a + i}{a - 1 + 2i}$. Quels sont, dans le plan complexe, les ensembles des points A, d'affixe a, pour lesquels on a : soit z réel positif, soit $|z| = 1$?

2.49 Soit, sur $\mathbb{C}$, la fonction h définie par $z \longmapsto \dfrac{z^2 - z - 2}{z - 1}$. Quel est l'ensemble Γ des images m de z dans le plan complexe lorsque $h(z) = Z$ est réel ? En posant $Z = X + iY$, $z = x + iy$, X, Y, x, y étant des réels, déterminer l'ensemble Δ des images m de z lorsque $Y = 2y$.

2.50 Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble des nombres complexes privé de $z = 1$, et soit f l'application de $\mathbb{C}_1$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(Z) = \frac{Z + 1}{\overline{Z} - 1}.$$

Déterminer dans le plan complexe :

1° l'ensemble $\mathcal{M}_1$ des points M d'affixe Z pour f(Z) réel.

2° l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des points M d'affixe z pour f (Z) imaginaire pur.

2.51 Établir, sur $\mathbb{C}$, l'identité :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

En déduire dans le plan complexe une propriété du parallélogramme.

2.52 On donne deux vecteurs $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v}$, $\vec{V}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ du plan vectoriel euclidien. Exprimer, dans $\mathbb{C}$, le produit scalaire $\vec{V}.\vec{V}'$, en fonction des affixes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, et deux conjugués $\bar{z}$ et $\bar{z}'$.

Applications. — 1° Démontrer que $\vec{V}.\vec{V}' = 0$ si, et seulement si, $\frac{Z}{Z'}$ est imaginaire pur ($\vec{V} \neq \vec{0}$ et $\vec{V}' \neq \vec{0}$).

2° Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que les images des trois nombres z, z^2, z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle.

2.53 Soit un plan affine euclidien P_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit D une droite du plan, passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ normé, et soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée de P_2.

A tout point M de P_2, on associe son symétrique par rapport à D.

1° Démontrer que :

$$\overrightarrow{OM}' = 2\,\frac{\vec{u}.\overrightarrow{OM}}{\vec{u}^2}\cdot\vec{u} - \overrightarrow{OM}.$$

2° En utilisant le produit scalaire défini sur $\mathbb{C}$ (exercice précédent) démontrer que, en appelant z, z', a les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}'$, $\vec{u}$, on a :

$$z' = a^2\,\bar{z}.$$

PROBLÈMES

2.54 Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur le corps des complexes. On considère le sous-ensemble E_1 de E formé des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

α et β étant deux complexes quelconques, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ leurs conjugués.

1° Démontrer que la restriction des lois d'addition et de multiplication des matrices confèrent à E_1 une structure d'anneau. Cet anneau est-il unitaire commutatif, d'intégrité.

2° Démontrer que E_1 a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dimension de cet espace et en donner une base simple.

3° Démontrer que l'application φ de E_1 vers E_1, telle que :

$$\text{si } M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \text{ on a } \varphi(M) = \begin{bmatrix} \alpha + \bar{\beta} & \bar{\alpha} + \beta \\ \alpha + \bar{\beta} & \bar{\alpha} + \beta \end{bmatrix},$$

est une application linéaire.

2.55 On considère des matrices carrées d'ordre deux du type :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

dont les éléments α, β, γ, δ sont des complexes.

On désigne par $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice unité.

On appelle *matrice scalaire* toute matrice qui est le produit d'un scalaire et de la matrice unité. D'autre part, on note :

$$M^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix},$$

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ étant les conjugués respectifs de α, β, γ, δ.

1° Déterminer les matrices M telles que $M + M^*$ et $M.M^*$ soient scalaires et que le déterminant de M soit réel positif ou nul. L'ensemble de ces matrices sera désigné par $(\mathcal{M})$.

2° Soit M une matrice de $(\mathcal{M})$. Définir l'ensemble des matrices M' telles que $M + M'$ et $M.M'$ soient des matrices scalaires.

3° Démontrer que toute matrice M de $(\mathcal{M})$ peut s'écrire, si l'on pose $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ (a, b, c, d, réels) :

$$M = aE + bI + cJ + dK,$$

I, J K étant trois matrices convenables.

Démontrer que les matrices E, I, J, K sont indépendantes sur le corps des réels. Calculer leurs carrés et leurs produits deux à deux.

Démontrer que la somme et le produit de deux matrices de $(\mathcal{M})$ sont des éléments de $(\mathcal{M})$.

Démontrer que toute matrice non nulle de $(\mathcal{M})$ possède une inverse qui est élément de $(\mathcal{M})$.

2.56 Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes : $\mathbb{C}$ a, sur $\mathbb{R}$, une structure d'espace vectoriel dont $\mathcal{B} = \{1, i\}$ est une base.

I. A tout couple de nombres complexes (u, v), on associe la transformation $\mathbf{T}_{(u,v)}$ qui, à tout z de $\mathbb{C}$, fait correspondre $Z = \mathbf{T}_{(u,v)}(z)$ tel que :

$$Z = uz + v\bar{z},$$

où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1° Démontrer que, quel que soit le couple (u, v), $\mathbf{T}_{(u,v)}$ est une transformation linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2° On pose :

$$u = a + ib \quad \text{et} \quad v = c + id,$$

où a, b, c, d sont des réels.

$\mathbb{C}$ étant rapporté à la base $\mathfrak{B}$, écrire la matrice de la transformation $\mathbf{T}_{(u, v)}$.

3° Démontrer que toute transformation linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une transformation $\mathbf{T}_{(u, v)}$ et déterminer le couple (u, v) en fonction des éléments de la matrice de la transformation :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$\mathbb{C}$ étant rapporté à la base $\mathfrak{B}$.

II. Démontrer que le sous-ensemble constitué par les transformations $\mathbf{T}_{(u, v)}$, où u est réel et v imaginaire pur, possède une structure d'anneau commutatif, relativement à la somme et au produit des transformations.

2.57 Soit un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $D = 1 + k^2$ soit un nombre premier.

Soit u, v deux entiers relatifs vérifiant la relation :

$$(E_n) \quad u^2 + v^2 = D^n \quad (n \text{ entier} \geqslant 1).$$

Démontrer que :

a) $u^2 - k^2v^2$ et $v^2 - k^2u^2$ sont des multiples de D (dont l'un peut être nul);

b) si D ne divise pas à la fois u et v, D divise un, et un seul, des nombres $u + kv$, $u - kv$; si D divise $u + kv$, D divise aussi $v - ku$;

c) pour toute solution de (E_n), le quotient de $u + iv$ par l'un des nombres $1 + ik$, $1 - ik$ prend la forme $u' + iv'$ avec u', v' entiers relatifs; calculer $u'^2 + v'^2$.

En déduire que, pour chaque entier n, D^n est décomposable d'une seule façon en la somme des carrés de deux entiers positifs non multiples de D. Donner la loi de formation de ces décompositions.

2.58 Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'ellipse E de foyers $F(C, O)$, $F'(C, O)$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ avec : } a > b > 0.$$

1° A tout point M de E, d'affixe z, on associe le point M', image de z', tel que :

$$z^2 + z'^2 = c^2.$$

Démontrer que : $\overline{OM'}^2 = \|\overrightarrow{MF}\| . \|\overrightarrow{MF'}\|$

2° Établir les relations :

$$|z - c|^2 + |z + c|^2 = 2(|z|^2 + c^2),$$

$$(|z - c| + |z + c|)^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2 + c^2),$$

puis les relations :

$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = \|\overrightarrow{M'F}\| + \|\overrightarrow{M'F'}\|,$$

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = a^2 + b^2.$$

3° Soit I et I′ les images des nombres complexes :

$$u = z + iz', \quad u' = z - iz'.$$

Démontrer que :

$$uu' = c^2; \quad |Z - c| + |Z + c| = |u| + |u'|;$$
$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = \|\overrightarrow{OI}\| + \|\overrightarrow{OI'}\|.$$

2.59 I. On convient d'appeler G le sous-ensemble de C constitué par les nombres complexes $x + iy$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.

On désignera par 0 l'élément nul de G, c'est-à-dire l'élément dont le module est nul et l'on notera :

$$G^* = G - \{0\}.$$

A tout élément α de G, on associe l'entier naturel $n(\alpha)$ égal au carré du module de α, soit $n(\alpha) = |\alpha|^2$.

1° Démontrer que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ confèrent à G une structure d'anneau commutatif.

2° Étant donné deux éléments α et β de C ($\beta \neq 0$), dit que « β divise α dans G » (ou que β est un diviseur de α dans G ou que x est un multiple de β dans G) pour exprimer qu'il existe un élément δ de G tel que l'on ait :

$$\alpha = \beta \times \delta.$$

a) Démontrer que, quel que soit γ élément de G, γ divise $n(\gamma)$ dans G.

b) Démontrer que si β divise α dans G, $n(\beta)$ divise $n(\alpha)$ dans $\mathbb{N}$.

Réciproquement, si $n(\beta)$ est un diviseur dans $\mathbb{N}$ de $n(\alpha)$, peut-on affirmer que β divise α dans G ?

c) Déterminer les éléments de G qui sont des diviseurs dans G du nombre complexe $\alpha = 1$. De tels éléments seront, par la suite, appelés éléments *unitaires* de G.

d) Démontrer que dans G* la relation binaire définie par :

« α divise β et β divise α »

est une relation d'équivalence; on la notera :

$$\alpha \parallel \beta,$$

et l'on énoncera simplement :

« α et β sont équivalents ».

Déterminer tous les éléments de G équivalents à un élément donné α.

Démontrer que si $\alpha \parallel \beta$, alors $n(\alpha) = n(\beta)$.

Peut-on énoncer une réciproque en supposant β diviseur de α et $n(\alpha) = n(\beta)$?

Application numérique. — Déterminer tous les diviseurs dans G de chacun des éléments : $1 + i$. $\quad -4 + 7i$.

3° *a*) Démontrer qu'étant donné un élément z de $\mathbb{C}$, il existe au moins un élément α de G tel que :

$$|z - \alpha| < 1.$$

Cet élément α est-il unique ?

Application numérique — Calculer α pour chacune des valeurs de z :

$$2 + 3i, \qquad \frac{5}{2}(1 + i).$$

b) En déduire que, quels que soient les éléments α et β de G*, il existe des éléments δ et ρ de G tels que l'on ait :

$$\alpha = \beta\delta + \rho \quad \text{et} \quad |\rho| < |\beta|.$$

Application numérique. — Calculer δ et ρ pour $\alpha = -2 + 5i$, $\beta = 3 + i$.

4° On appelle « diviseur strict » de α, dans G*, tout diviseur de α qui n'est ni élément unitaire, ni équivalent à α.

Un élément de G* est dit *premier* dans G pour exprimer qu'il n'admet pas de diviseur strict; dans le cas contraire, il est dit *composé* dans G.

Démontrer que si un élément α de G est tel que $n(\alpha)$. $[n(\alpha) \neq 1]$ est un nombre premier dans N, alors α est premier dans G. La réciproque est fausse : on montrera par exemple que 3 est premier dans G.

Application numérique. — Rechercher si les éléments suivants sont premiers ou composés dans G :

$$2, \quad 5, \quad 1 + i, \quad 3 - i, \quad 3 + 4i.$$

II. On convient de dire qu'un ensemble $\mathfrak{J}$, non vide et non réduit à $\{0\}$, est *impact* pour exprimer qu'il possède les trois propriétés suivantes :

1 $\mathfrak{J}$ est un sous-ensemble de G.

2 $\forall u \in \mathfrak{J}, \forall v \in \mathfrak{J}$, alors $u - v \in \mathfrak{J}$.

3 $\forall u \in \mathfrak{J}, \forall \alpha \in G$, alors $\alpha u \in \mathfrak{J}$.

1° *a*) Démontrer que, ε étant un élément donné de G*, l'ensemble E constitué par les éléments e de la forme $e = \alpha\varepsilon$, où α parcourt G, est impact.

b) Réciproquement, démontrer que, dans tout ensemble impact, il existe un élément r non nul, défini à un facteur unitaire multiplicatif près, qui a un module minimum, et que tout élément de cet ensemble est un multiple dans G de r.

2° *a*) Étant donné n éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, non tous nuls, de G, démontrer que l'ensemble F constitué par des éléments f de la forme $f = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ parcourent G, est impact.

b) En déduire que, parmi les diviseurs dans G communs à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il en existe un, défini à un facteur unitaire près, de module maximum, et que tous les autres diviseurs communs sont des diviseurs dans G de celui-là.

3° On dit que deux éléments α et β de G sont *premiers entre eux* dans G (ou que α est premier avec β) pour exprimer que leurs seuls diviseurs communs sont des éléments unitaires.

a) Démontrer que α et β satisfont à une relation de la forme :

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1,$$

où λ et μ sont des éléments de G.

En déduire que si un élément α de G* divise le produit $\beta\gamma$ de deux éléments de G* et que si α est premier avec β, alors α divise γ dans G.

En particulier si l'élément α, premier dans G, divise dans G le produit $\beta\gamma$, alors α divise β ou α divise γ. Si, en plus, β et γ sont aussi premiers dans G, alors $\alpha \parallel \beta$ ou $\alpha \parallel \gamma$.

b) En déduire que tout élément composé de G est décomposable en un produit de facteurs premiers dans G, chacun étant défini à un facteur unitaire près et cela d'une façon unique.

Application numérique. — Décomposer chacun des nombres :

$$3 - i, \quad 9 + 7i.$$

III. 1° *a*) Démontrer qu'aucun élément premier dans G ne peut diviser dans G deux nombres premiers dans $\mathbb{N}$.

b) Démontrer que tout élément λ, premier dans G, divise dans G un et un seul nombre l premier dans $\mathbb{N}$.

c) Déduire du *b*) que :

— ou bien $l \parallel \lambda$;

— ou bien $l = n(\lambda)$ et alors l, qui n'est pas premier dans G, est une somme de deux carrés d'éléments de $\mathbb{Z}$.

2° Étant donné un nombre l premier, de $\mathbb{N}$, et différent de 2, il est soit de la forme $4k + 3$, soit de la forme $4k + 1$, où k appartient à $\mathbb{N}$.

a) Si $l = 4k + 3$, démontrer que l est premier dans G.

b) Si $l = 4k + 1$, on admettra qu'il est d'une seule façon la somme de deux carrés d'entiers naturels.

3° Que peut-on dire alors de la recherche des éléments premiers dans G ?

(*CAPES*, 1967)

2.60 *Rappels.* — On appelle automorphisme d'un corps K toute application bijective u de K sur K telle que :

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \text{et} \quad u(xy) = u(x)\,u(y).$$

On désigne par j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. 1° Montrer que l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, qui appartiennent au corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, est un corps pour l'addition et la multiplication des nombres réels.

2° Soit P(X) un polynome à coefficients rationnels, K un corps quelconque contenant $\mathbb{Q}$, u un automorphisme de K laissant invariants les éléments de $\mathbb{Q}$.

Montrer que si α est racine de P dans K, $u(\alpha)$ est aussi racine de P. Que peut-on en déduire pour $\bar{\alpha}$, imaginaire conjugué de α si α est racine de P? Étudier de même $a - b\sqrt{2}$ (a et b dans $\mathbb{Q}$) si $a + b\sqrt{2}$ est racine de P.

B. 1° Montrer que le polynome :

$$P(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$$

a exactement deux racines réelles en étudiant les variations de P(X) à l'aide de P′(X) et de P″(X).

2° Calculer $P(j)$. En déduire les racines de $P(X)$ et décomposer $P(X)$ en produit de facteurs du premier et du second degré à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

C. 1° Montrer que $a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2} = 0$, a, b, c et d appartenant à $\mathbb{Q}$, entraîne $a = b = c = d = 0$.

Montrer que l'ensemble :

$$K = \{a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\},$$

est un corps contenant $\mathbb{Q}$.
Trouver l'inverse de $1 + \sqrt{2} + j + j\sqrt{2}$.

2° Résoudre dans K l'équation :

$$X^2 - (1 + \sqrt{2} + 2j)X + 1 = 0.$$

3° Soit G l'ensemble des automorphismes de K laissant invariants les éléments de $\mathbb{Q}$. Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

4° Montrer qu'un élément u de G est déterminé par la donnée de $u(\sqrt{2})$ et de $u(j)$.
Montrer que $u(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ou $u(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ et que $u(j) = j$ ou $u(j) = j^2$.

5° Trouver le nombre n d'éléments de G et donner sa table. Indiquer les propriétés de G.

Quel est l'ensemble des éléments de K laissés invariants par tous les éléments de G, par un élément de G différent de l'automorphisme identique ?

D. Soit $u_1, \ldots, u_n$ les éléments de G (u_1 est l'élément neutre), et soit α un élément de K.

Montrer que :

$$R(X) = [X - u_1(\alpha)][X - u_2(\alpha)] \ldots [X - u_n(\alpha)]$$

est à coefficients rationnels.

Soit $S(X)$ un polynome à coefficients rationnels admettant α pour racine. Comparer R et S. (On discutera suivant que les $u_i(\alpha)$ sont distincts ou non.)

(*HEC.* 1971)

3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

NOTA. — *Dans tout ce chapitre, le plan vectoriel euclidien* $\vec{\mathbf{P}}$ *est rapporté à une base orthonormée directe* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, *ce qui signifie que l'angle* $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$ *est égal à l'angle droit positif* $\hat{\delta}$.

3.1 RAPPELS ET COMPLÉMENTS

3.1.1 Le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 = 1$, et le groupe $\mathcal{A}$ des angles.

1 Soit $(\mathcal{A}, +)$ le groupe additif des angles et $(\mathbb{U}, \times)$ le groupe multiplicatif des matrices réelles de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 = 1.$$

Ces deux groupes sont des groupes commutatifs.
Rappelons que le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles est un groupe isomorphe au groupe $(\mathcal{R}, \circ)$ des rotations vectorielles de $\vec{\mathbf{P}}$.

2 Pour toute matrice A fixée, dans toute base orthonormée *directe* du plan vectoriel euclidien orienté $\vec{\mathbf{P}}$, il existe une rotation φ, et une seule, et, par suite, un seul angle $\hat{\varphi}$.

3 Soit g l'application de $\mathbb{U}$ vers $\mathcal{A}$ telle que :

$$g(A) = \hat{\varphi};$$

d'après **2**, cette application est une *bijection*.

Le produit des matrices A et A' des rotations vectorielles φ, φ' est la matrice de la rotation vectorielle $\varphi' \circ \varphi$; d'où :

$$g(A \times A') = \hat{\varphi}' + \hat{\varphi},$$

et, par suite, pour tout couple (A, A') de matrices de $\mathbb{U}$:

$$g(A \times A') = g(A') + g(A).$$

Il en résulte que l'application g est un *isomorphisme* du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ sur le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles :

$$(\mathbb{U}, \times) \approx (\mathcal{A}, +);$$

$$\mathbb{U} \xrightarrow[g]{} \mathcal{A}.$$

3.1.2 Le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles.

1 Nous avons admis (Aleph_0, Algèbre 1ère CDE, n° **9.1.2**) l'existence d'un *homomorphisme surjectif*, dit *canonique*, du groupe ($\mathbb{R}$, +) sur le groupe ($\mathcal{A}$, +). Nous le noterons, ici, **f**.

Cet homomorphisme **f** est tel que, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On a, en particulier :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \hat{\delta};$$

on dit que $\frac{\pi}{2}$ est *une* mesure de l'angle droit positif.

Plus généralement, tout x réel tel que $f(x) = \hat{\varphi}$ est *une* mesure de l'angle $\hat{\varphi}$.

2 L'équation définie par :

$$f(x) = \hat{\varphi},$$

où $\hat{\varphi}$ est un angle fixé, possède une infinité de solutions; si x_0 est l'une d'elles, l'ensemble μ des solutions est :

$$\mu = \{x;\, x \in \mathbb{R},\, \exists_{\mathbb{Z}} k \quad x = x_0 + k.2\pi\}.$$

L'application f n'*est pas injective*. Le *noyau* $\mathcal{N}$ de l'homomorphisme f, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que :

$$\mathbf{f}(x) = \hat{0} \qquad (\hat{0} \text{ étant l'angle nul}),$$

est égal à $2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble μ n'est autre que la *classe* $\dot{x}$ de x_0 *modulo* $2\pi\mathbb{Z}$, élément du groupe additif quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\mu \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

3 Nous définissons ainsi une application, notée ici $\bar{\mathbf{f}}$, de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que :

$$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) = \dot{x},$$

soit : $$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) = \mu.$$

L'application $\bar{\mathbf{f}}$ est *surjective* :

pour tout réel x_0 fixé appartenant à la classe $\dot{x}$, l'homomorphisme canonique f associe un angle $\hat{\varphi}$:

$$\mathbf{f}(x_0) = \hat{\varphi} \text{ et } \dot{x} = \bar{\mathbf{f}}[\mathbf{f}(x_0)].$$

L'application $\bar{\mathbf{f}}$ est *injective* :

si l'on a : $$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) = \bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}'),$$

alors : $$\bar{\mathbf{f}}[\mathbf{f}(x)] = \bar{\mathbf{f}}[\mathbf{f}(x')],$$

soit : $$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x'),$$

c'est-à-dire : $$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}'.$$

L'application $\bar{\mathbf{f}}$ est une *bijection* du groupe additif $\mathcal{A}$ des angles sur le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cette application $\bar{\mathbf{f}}$ est un *isomorphisme* de groupes. Il suffit, pour le démontrer, de prouver l'égalité :

$$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}) = \bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) + \bar{\mathbf{f}}(\hat{\psi}).$$

Soit deux éléments x et y tels que :

$$x \in \bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) = \mu_1, \qquad y \in \bar{\mathbf{f}}(\hat{\psi}) = \mu_2.$$

La définition de la somme de deux classes de congruences entraîne :

$$\mu_1 \dot{+} \mu_2 = \overset{\cdot}{\widehat{x + y}};$$

(Le signe $\dot{+}$ indique qu'il s'agit d'une addition dans les classes modulo $2\pi\mathbb{Z}$.)

Donc, l'ensemble des nombres réels t, solutions de l'équation définie par : $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(x + y)$, n'est autre que la somme $\mu_1 + \mu_2$.
Or, $\mathbf{f}$ est un *homomorphisme*, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{f}(x + y) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{f}(y) = \hat{\varphi} + \hat{\psi};$$

$\mu_1 + \mu_2$ est donc l'ensemble des nombres t tels que :

$$\mathbf{f}(t) = \hat{\varphi} + \hat{\psi},$$

c'est-à-dire l'ensemble :

$$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}),$$

et :

$$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}) = \bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) + \bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}).$$

3.1.3 Conclusion.

Le plan vectoriel euclidien $\vec{\mathbf{P}}$ étant rapporté à une base orthonormée directe, les groupes commutatifs suivants sont isomorphes :

a) $(\mathbb{U}, \times)$: groupe multiplicatif des matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1;$$

b) $(\mathcal{A}, +)$: groupe additif des angles notés $\hat{\varphi}$;

c) $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$: groupe additif des réels modulo 2π, notés $\dot{x}$.

Les isomorphismes sont réalisés par les applications suivantes :

$$\mathbb{U} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathcal{A} \xrightarrow{\bar{\mathbf{f}}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$
$$A \longmapsto \hat{\varphi} \longmapsto \dot{x}$$

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

On considère le produit cartésien $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{U}$ *des groupes multiplicatifs* $\mathbb{R}^{*+}$ *et* $\mathbb{U}$. ($\mathbb{U}$ *est le groupe multiplicatif des nombres complexes* γ *de module* 1.)

1° *Démontrer que* $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{U}$ *peut être muni d'une structure de groupe commutatif, dit « groupe produit cartésien ».*

2° *Démontrer que l'application* $\mathbf{f}$ *définie par* $z \longmapsto \left(|z|, \dfrac{z}{|z|}\right)$ *est un isomorphisme du groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$ *des nombres complexes* z *sur le groupe produit cartésien* $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{U}$.

3.2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

3.2.1 Homomorphisme θ du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

1 Toute matrice A de l'ensemble $\mathbb{U}$, dans toute base orthonormée directe, s'exprime sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1,$$

où a et b sont des nombres réels.

On sait que toute matrice A, écrite sous la forme précédente, se note également et d'une *manière unique* :

$$u = a + ib, \qquad i^2 = -1,$$

u étant un nombre complexe de module égal à un.

L'ensemble $\mathbb{U}$ est *le sous-ensemble des nombres complexes de module* 1.

2 Le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des matrices A et le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles sont isomorphes par la bijection g (n° **3.1.1**). Il en résulte que le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes u de module 1 et le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles sont *isomorphes* puisqu'il ne s'agit, pour toute matrice A, que d'un *changement de notation* :

$$\mathbf{g}(u) = \hat{\varphi} \quad (u \in \mathbb{U} \text{ et } \hat{\varphi} \in \mathcal{A}).$$

3 Il existe un homomorphisme surjectif **f** de $\mathbb{R}$ sur le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles et un isomorphisme g du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ sur $\mathcal{A}$. Par composition des applications **f** et $\mathbf{g}^{-1}$, on en déduit un *homomorphisme surjectif* θ du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, .)$, défini par :

$$\theta = \mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{f},$$

suivant le schéma :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{g}^{-1}} \mathbb{U}, \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{U}.$$

4 Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\theta(x + y) = \theta(x) \times \theta(y), \quad \theta(x) = u, \quad \theta(y) = u'.$$

D'où : $\quad \boldsymbol{\theta(x + y) = u . u'}.$

EXEMPLES. I. $\theta(0) = (\mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{f})(0) = \mathbf{g}^{-1}(\hat{0}) = 1$ car à l'angle nul $\hat{0}$ correspond la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le nombre complexe $u = 1$.

II. On obtient également :

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\,; \quad \theta(\pi) = -1\,; \quad \theta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

---

5 Le noyau $\mathcal{N}$ de l'homomorphisme θ est égal au sous-groupe additif $2\pi\mathbb{Z}$. On a, en effet :

$$\overset{-1}{\theta} = (\mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{f})^{-1} = \overset{-1}{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g}\,;$$

comme : $\mathbf{g}\{1\} = \hat{0}$ et $\overset{-1}{\mathbf{f}}\{\hat{0}\} = 2\pi\mathbb{Z}$,

il en résulte : $\mathcal{N} = 2\pi\mathbb{Z}$.

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

On appelle amplitude *du nombre complexe* u ($|u| = 1$), *l'angle* φ *tel que :*

$$\mathbf{g}(u) = \varphi \quad \text{(voir n° 3.2.1).}$$

D'autre part, le nombre réel x *tel que* $\theta(x) = u$ *est une solution de l'équation définie par* $\mathbf{f}(x) = \varphi$ *: c'est* une *mesure de l'amplitude* φ. *On note :* $\varphi = \text{Am}\,u$. *(On retrouvera cette notion au paragraphe n°* **3.3.1**.)

Déterminer l'ensemble des mesures de l'amplitude des nombres complexes j et ij.

1° On a : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où : $|j| = 1$;

si x est une mesure de $\text{Am}\,j$, alors :

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble E des mesures de $\text{Am}\,j$ est donc :

$$E = \left\{x : x \in \mathbb{R},\ \exists_{\mathbb{Z}} k \quad x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi\right\}.$$

2° Soit θ l'homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

Si : $\theta(x_1) = i$ et $\theta(x_2) = j$,

on a : $\theta(x_1 + x_2) = i.j$.

Comme : $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi$ et $x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + h2\pi \qquad (k, h) \in \mathbb{Z}^2$,

il en résulte : $x_1 + x_2 = \dfrac{7\pi}{6} + p.2\pi \qquad (p = k + h)$.

L'ensemble F des mesures de **Am** (ij) est tel que :

$$F = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7\pi}{6} + p.2\pi, \quad p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3° Calculons ij :

$$ij = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right).$$

On a bien $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Étudier les ensembles des mesures des amplitudes respectives des nombres complexes :

$$j^2, \ -\bar{j}, \ -j, \ ij^2, \ \overline{ij}.$$

3.2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe de module 1.

1 La surjection canonique **f** du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{A}, +)$ et la définition des fonctions circulaires entraînent que toute matrice A relative à un angle $\hat{\varphi}$, dans toute base orthonormée directe, s'exprime sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

où : $\mathbf{cos}\ x = \mathbf{Cos}\ \hat{\varphi} = \mathbf{Cos\ f}(x).$

$\mathbf{sin}\ x = \mathbf{Sin}\ \hat{\varphi} = \mathbf{Sin\ f}(x).$

Le nombre x est un réel, solution de l'équation définie par $\mathbf{f}(x) = \hat{\varphi}$.

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{\ \mathbf{cos}\ } & \mathbb{R} \\ & \nwarrow_{\mathbf{Cos}} \quad \mathcal{A} \quad \swarrow_{\mathbf{f}} & \end{array}$$

et : $\mathbf{cos} = \mathbf{Cos} \circ \mathbf{f};$

de même : $\mathbf{sin} = \mathbf{Sin} \circ \mathbf{f}.$

2 Toute matrice A, écrite sous la forme précédente, se note également :

$$\boxed{\boldsymbol{u = \cos x + i \sin x, \qquad i^2 = -1}}$$

On dit que le nombre complexe $u(|u| = 1)$ est écrit sous **forme trigonométrique**.

3 *Remarque importante.*

Le nombre x est **une** solution de l'équation définie par :

$$\mathbf{f}(x) = \hat{\varphi};$$

il en résulte d'après le n° **3.1.2** que, μ étant l'*ensemble des solutions* de cette équation :

$$x \in \mu \quad \text{ou} \quad x \in \dot{x},$$

$\dot{x}$ étant *un élément* du groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que :

$$\bar{\mathbf{f}}(\hat{\varphi}) = \dot{x},$$

avec :

$$\bar{\mathbf{f}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

3.2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

1 Considérons l'application **h** qui, à tout nombre complexe non nul z, fait correspondre le nombre complexe $\mathbf{h}(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

On a, pour tout z élément de $\mathbb{C}^*$:

$$|\mathbf{h}(z)| = \frac{|z|}{|z|} = 1;$$

le nombre complexe $\mathbf{h}(z)$ est un nombre complexe de module 1.
Il a été établi (n° **2.4.3**) que tout nombre complexe z s'écrit de façon *unique* :

$$z = |z|\, u \quad (u \in \mathbb{U}).$$

D'autre part, pour tout couple (z_1, z_2) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$:

$$\mathbf{h}(z_1).\mathbf{h}(z_2) = \frac{z_1}{|z_1|} \times \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|};$$

d'où : $$\mathbf{h}(z_1 z_2) = \mathbf{h}(z_1)\,\mathbf{h}(z_2).$$

L'application **h** est un ***homomorphisme*** du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

2 On sait que tout nombre complexe, élément de $\mathbb{U}$, s'écrit :

$$u = \cos x + i \sin x,$$

x étant un nombre réel tel que :

$$\mathbf{f}(x) = \hat{\varphi},$$

où **f** est l'homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur le groupe des angles.

Il en résulte que tout nombre complexe z, non nul, peut s'écrire :

$$\boxed{z = r(\cos x + i \sin x) \qquad r = |z| \quad x \in \mathbb{R}}$$

Cette égalité s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z, *non nul.*

3 Tout nombre complexe non nul s'écrit également de *manière unique* :

$$z = a + ib,$$

où a et b sont des nombres réels.

On a : $$r(\cos x + i \sin x) = a + ib,$$

d'où : $$a = r \cos x,$$

$$b = r \sin x,$$

c'est-à-dire :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ce qui détermine parfaitement l'ensemble des nombres réels x.

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z = 1 + i, \quad z' = 1 - i.$$

Dans les deux cas :

$$|z| = |z'| = \sqrt{2}.$$

D'où :
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \quad z' = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right),$$

et :
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

■ EXERCICES D'APPLICATION IMMÉDIATE.

I. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants*

a) $z = i$; $z = 9i$; $z = -6$; $z = +8$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z = 1 - i\sqrt{3}$; $z = j$.

II. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :*

a) $z = \sin\theta - i\cos\theta$; $z = 1 + i\,\text{tg}\,\theta$; $z = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$.

(θ est un nombre réel fixé.)

b) $z = \dfrac{-1}{1+i}$; $z = \dfrac{5}{1-i}$.

III. *Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant :*

$$t = \frac{21\,(5i - \sqrt{3})}{2 - i\sqrt{3}}.$$

3.3 ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

3.3.1 Isomorphisme du groupe ($\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, +) sur le groupe ($\mathbb{C}^*$, $*$).

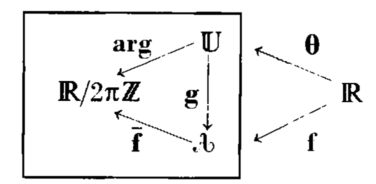
1 Nous avons établi que l'homomorphisme surjectif canonique $\mathbf{f}$ du groupe additif des réels sur le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles impliquait l'existence d'un homomorphisme surjectif canonique $\boldsymbol{\theta}$ du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

D'autre part, l'application $\bar{\mathbf{f}}$ du groupe $\mathcal{A}$ des angles sur le sous-groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un *isomorphisme de groupes*; de même, les groupes $\mathbb{U}$ et $\mathcal{A}$ sont isomorphes par la bijection $\mathbf{g}$.

Il en résulte que l'application composée $\bar{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g}$ est un isomorphisme du groupe $\mathbb{U}$ sur le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

> **On appelle *fonction argument* la bijection $\bar{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g}$ de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:**
>
> **On note :** $$\mathbf{arg} = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g}.$$

On a le schéma suivant :



Les trois groupes encadrés sont isomorphes.

2 On a, pour tout nombre u, élément de $\mathbb{U}$:

$$\mathbf{arg}\, u = (\bar{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g})\, u,$$

puis, comme $\mathbf{g}(u) = \hat{\varphi}$:

$$\mathbf{arg}\, u = \bar{\mathbf{f}}\,(\hat{\varphi}),$$

donc, comme $\bar{\mathbf{f}}\,(\hat{\varphi}) = \dot{x}$:

$$\mathbf{arg}\, u = \dot{x}.$$

3.3.2 Argument d'un nombre complexe *u* et forme trigonométrique de *u*.

1 L'*application argument* associe à tout nombre complexe u la classe $\dot{x}$ des nombres réels modulo 2π, c'est-à-dire l'ensemble μ des solutions de l'équation définie par :

$$\mathbf{f}(x) = \hat{\Phi},$$

f étant l'homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$.

Il en résulte, d'après la remarque du paragraphe n° 3.2.2, que $\dot{x}$ n'est autre que la *classe des nombres* x définis par la forme trigonométrique de u :

$$u = \cos x + i \sin x,$$

c'est-à-dire :

$$[x \in \dot{x} \iff x \in (\bar{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g})\, u \iff x \in \mathbf{arg}\, u].$$

EXEMPLE. Soit le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

On a : $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\cdot$

Un élément x de l'argument de u est $\frac{2\pi}{3}\cdot$

D'où : $\mathbf{arg}\, u = \frac{\dot{2}\pi}{3}$ (modulo 2π).

DÉFINITION / **Un nombre complexe u de module 1 étant écrit sous forme trigonométrique : $\cos x + i \sin x$, on appelle *argument du nombre u*, noté arg u, la classe $\dot{x}$ des nombres réels x ; arg u est un élément du sous-groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.**

REMARQUE. — Si l'on utilise un réel x tel que :

$$x \in \mathbf{arg}\, u,$$

on dit couramment que x est *un* argument du nombre complexe z ; x est *un représentant fixé* de la classe arg u.

Quel que soit un tel nombre x, il existe un nombre complexe u, unique, tel que :

$$u = \cos x + i \sin x.$$

2 Dans le sous-ensemble $I = [0, 2\pi[$ de $\mathbb{R}$, pour toute classe $\dot{x}$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il existe *un* représentant x unique de $\dot{x}$, appartenant à I.

Soit ω l'injection canonique définie par :

$$\omega(\dot{x}) = x.$$

On remarque : $\omega(\dot{x}) \in \dot{x}$.

Cette application ω de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$ permet de définir par composition avec l'application **arg** une nouvelle application notée **Arg**, lue **grand argument**, du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ vers le groupe additif $\mathbb{R}$. On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & & \\ \text{arg} \downarrow & \searrow^{\text{Arg}} & \\ \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \xrightarrow[\omega]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

et : $\mathbf{Arg} = \omega \circ \mathbf{arg}.$

Le *nombre réel* **Arg** u est appelé **la détermination principale** de **arg** u et l'on a :

$$\mathbf{Arg}\, u \in \mathbf{arg}\, u.$$

Tout nombre complexe u peut donc s'écrire :

$$\boxed{u = \cos(\mathrm{Arg}\, u) + i \sin(\mathrm{Arg}\, u)}$$

EXEMPLE. Soit le nombre complexe u tel que :

$$u = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

On a, puisque $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\mathbf{Arg}\, u = \frac{3\pi}{4}.$$

Notons que : $\mathbf{arg}\, u = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$,

et qu'un argument de u est, par exemple : $\frac{11\pi}{4}$.

3.3.3 Formule de Moivre.

1 Pour tout réel x fixé tel que : $x \in \mathbf{arg}\ u$, il existe un nombre complexe u unique défini par :

$$u = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbf{arg}\ u),$$

c'est-à-dire : $x \in \dot{x}, \quad \dot{x} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$

Soit :

$$u_1 = \cos x_1 + i \sin x_2,$$

$$u_2 = \cos x_2 + i \sin x_2,$$

$$u = \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2),$$

les nombres complexes de module 1 respectivement définis par :

$$x_1, x_2, x = x_1 + x_2.$$

Dans l'ensemble des classes modulo 2π, on a :

$$\dot{x} = \dot{\overbrace{x_1 + x_2}} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2,$$

soit : $\mathbf{arg}\ u = \mathbf{arg}\ u_1 + \mathbf{arg}\ u_2,$

le réel x appartenant à $\mathbf{arg}\ u$.

Comme : $\mathbf{arg}\ (u_1 u_2) = \mathbf{arg}\ u_1 + \mathbf{arg}\ u_2,$

il en résulte : $\mathbf{arg}\ u = \mathbf{arg}\ (u_1 u_2),$

et par suite :

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2)\\ &\qquad = (\cos x_1 + i \sin x_2)(\cos x_2 + i \sin x_2)\end{aligned}}$$

Cette égalité porte le nom de **formule de Moivre.**

On en déduit les égalités connues :

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1,$$

qui permettent de trouver la somme de deux arguments.

2 La formule de MOIVRE s'étend à un produit de n nombres complexes de module 1 : $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_n$.

On écrit : $\prod_{k=1}^{n} u_k = \cos \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sin \sum_{k=1}^{n} x_k.$

EXEMPLE. De la relation :

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c) = \cos(a + b + c) + i \sin(a + b + c),$$

on déduit :

$$\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \cos b \sin c \sin a - \cos c \sin a \sin b;$$

$$\sin(a + b + c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.$$

3 Dans le cas où :

$$u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_k = \cdots = u_n,$$

on a :

$$u^n = \cos nx + i \sin nx,$$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

4 D'autre part, la relation :

$$\arg(z^{-n}) = -n \arg z$$

entraîne :

$$(\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos(-nx) + i \sin(-nx).$$

La relation :

$$\boxed{(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx}$$

s'étend aux exposants entiers relatifs.

Elle porte aussi le nom de **formule de Moivre**.

3.3.4 Argument d'un nombre complexe z non nul.

1 Les applications **arg** et **Arg** ont été uniquement définies sur le sous-groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. D'autre part, nous avons étudié l'homomorphisme $\mathbf{h}$ du groupe $\mathbb{C}^*$ sur le sous-groupe $\mathbb{U}$, défini par :

$$z \longmapsto \mathbf{h}(z) = \frac{z}{|z|}.$$

L'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, telle que :

$$z \longmapsto \arg[\mathbf{h}(z)],$$

a pour restriction à l'ensemble $\mathbb{U}$ l'application **arg**.

Nous la noterons par le même symbole **arg**, ce qui donne le diagramme suivant :

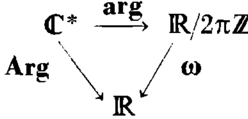
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \mathbb{U} \\ \mathbb{C}^* & & \downarrow \mathbf{arg} \\ & \xrightarrow{\mathbf{arg}} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{array}$$

On a :

$$\boxed{\mathbf{arg}\, z = \mathbf{arg}\, \frac{z}{|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De même : $\mathbf{Arg}\, z = \mathbf{Arg}\, \frac{z}{|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$;

d'où le schéma :



DÉFINITION / **L'argument du nombre complexe z non nul est l'argument du nombre complexe $\frac{z}{|z|}$**

2 Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme :

$$z = r(\cos x + i \sin x), \quad r = |z| \quad (x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}^{*+}),$$

avec : $x \in \mathbf{arg}\, z$.

On représente souvent le nombre z par le couple (r, x), x étant l'un quelconque des représentants de la classe **arg** u. On choisit de préférence la *détermination principale* **Arg** u.

3 On appelle *un* argument de z l'un quelconque des représentants de la classe **arg** u.

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, α étant un nombre réel.

On a : $|z|^2 = (1 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1 + \cos\alpha) = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

d'où : $|z| = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

1° $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$.

On peut écrire : $z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$, $|z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$ et : $\frac{\alpha}{2} \in \mathbf{arg}\ u$.

On dit que $\frac{\alpha}{2}$ est *un* argument de z.

2° $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

Par suite : $|z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$ et $z = \left(-2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left[\cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right]$.

d'où : $z = \left(-2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left[\cos \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right]$,

et : $\left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \in \mathbf{arg}\ z$.

On dit que $\pi + \frac{\alpha}{2}$ est *un* argument de z.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$, α étant un nombre réel.

3.3.5 Propriétés de la fonction argument de z.

■ RELATION FONDAMENTALE.

L'application argument est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 sur le groupe additif des réels modulo 2π; cette application a été *prolongée* par l'homomorphisme $\mathbf{h}$ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{U}$ en une application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls; on a, d'après le paragraphe précédent :

$$\mathbf{arg}\,(zz') = \mathbf{arg}\,\frac{zz'}{|zz'|};$$

or :

$$\mathbf{arg}\,\frac{zz'}{|zz'|} = \mathbf{arg}\left(\frac{z}{|z|} \times \frac{z'}{|z'|}\right),$$

et, du fait de l'isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ sur le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\mathbf{arg}\left(\frac{z}{|z'|} \times \frac{z}{|z'|}\right) = \mathbf{arg}\,\frac{z}{|z'|} + \mathbf{arg}\,\frac{z}{|z'|}.$$

Par suite, pour tout couple (z, z') de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, on obtient la relation :

$$\boxed{\arg(zz') = \arg z + \arg z'} \qquad (1)$$

On peut énoncer :

THÉORÈME / 1 **L'argument du produit de deux nombres complexes non nuls est égal à la somme des arguments de ces deux nombres.**

■ CONSÉQUENCES.

La relation fondamentale :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$$

se généralise par récurrence sur l'entier naturel n. On obtient :

$$\arg \prod_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} \arg z_i \qquad (2)$$

et, en particulier :

$$\boxed{\arg z^n = n \arg z} \qquad (3)$$

Posons : $z' = \frac{1}{z}$, soit : $zz^{-1} = 1$.

On a : $\arg(zz^{-1}) = \arg z + \arg z^{-1}$;

comme : $\arg(1) = \bar{0}$,

il en résulte : $\arg(z^{-1}) = -\arg z$.

On peut énoncer :

THÉORÈME / 2 **L'inverse d'un nombre complexe non nul, d'argument x, a pour argument l'opposé $(-x)$ de x.**

Il en résulte : $\arg \frac{z}{z'} = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$,

et : $\arg \frac{1}{z^n} = -\arg(z^n) = -n \arg z$,

ou : $\arg(z^{-n}) = -n \arg z$,

ce qui généralise, sur $\mathbb{Z}$, la relation (3) de ce paragraphe.

3.3.6 Cas des nombres réels et des nombres imaginaires purs.

1 Considérons l'application qui, à tout nombre complexe $z (z \neq 0)$, associe son argument **arg** z. Cette application est un homomorphisme surjectif du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Le *noyau* de cet homomorphisme, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{C}^*$ qui a pour argument $\dot{0}$ élément neutre du groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, est le sous-groupe $\mathbb{R}^{*+}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

En effet, tout réel strictement positif a a pour argument $\dot{0}$:

$$\mathbf{arg}\, a = \mathbf{arg}\, \frac{a}{|a|} = \mathbf{arg}\, 1 = \dot{0} \text{ ou } \mathbf{Arg}\, a = 0, \text{ et } \textit{réciproquement};$$

d'où : $$(\mathbf{Arg}\, z = 0) \iff (z \in \mathbb{R}^{*+}).$$

2 Tout réel a, strictement négatif, a pour argument $\dot{\pi}$:

$$\mathbf{arg}\, a = \mathbf{arg}\, \frac{a}{|a|} = \mathbf{arg}\,(-1) = \dot{\pi} \text{ ou } \mathbf{Arg}\, a = \pi, \text{ et } \textit{réciproquement};$$

d'où : $$(\mathbf{Arg}\, z = \pi) \iff (z \in \mathbb{R}^{*-}).$$

Le sous-ensemble de $\mathbb{C}^*$, qui par l'homomorphisme précédent a pour image l'élément $\dot{\pi}$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, est l'ensemble $\mathbb{R}^{*-}$.

3 Si l'on note $\overset{-1}{\mathbf{f}}$ la réciproque de la fonction **arg** z, on a :

$$\overset{-1}{\mathbf{f}}\,\{\dot{0}, \dot{\pi}\} = \mathbb{R}^*.$$

Le nombre $z = 0$ n'a pas d'argument défini.

4 Si z est un imaginaire pur, on a : $z = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$;

d'où : $$\mathbf{Arg}\,(i\lambda) = \mathbf{Arg}\, i + \mathbf{Arg}\, \lambda;$$

comme : $$\mathbf{Arg}\, i = \frac{\pi}{2},$$

il en résulte que :

a) si : $\lambda > 0$: $\mathbf{Arg}\, i\lambda = \dfrac{\pi}{2}$, et *réciproquement*;

b) si : $\lambda < 0$: $\mathbf{Arg}\, i\lambda = \dfrac{3\pi}{2}$, et *réciproquement*.

EXEMPLE. $\mathbf{Arg}\, 2i = \dfrac{\pi}{2}$; $\mathbf{Arg}\,(-3i) = \dfrac{3\pi}{2}$.

3.3.7 Résumé des propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe non nul.

■ $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$; (1)

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$; (2)

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg z^n = n \arg z \quad (n \in \mathbb{Z})$; (3)

$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$ et $\arg \prod_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \arg z_k$. (4)

■ $z \in \mathbb{R}^{*+} \iff \arg z = \dot{0} \iff \text{Arg}\, z = 0$;

$z \in \mathbb{R}^{*-} \iff \arg z = \dot{\pi} \iff \text{Arg}\, z = \pi$;

($z = 0 \iff |z| = 0$) : pas d'argument défini :

z imaginaire pur est équivalent à : $\text{Arg}\, z \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

■ Si l'on utilise la notation $z = (r, x)$ du nombre complexe non nul $z = r(\cos x + i \sin x)$, où r est élément de $\mathbb{R}^{*+}$, les relations (1), (2), (3) précédentes s'écrivent :

$$(r, x) \times (r, x') = [rr', x + x'] ;$$

$$\frac{(r, x)}{(r, x')} = \left(\frac{r}{r'}, x - x'\right) ;$$

$(r, x)^n = (r^n, nx)$ pour tout n entier.

En particulier, pour $n = -1$:

$$(r, x)^{-1} = \frac{1}{(r, x)} = \left(\frac{1}{r}, -x\right).$$

■ En utilisant la forme trigonométrique $z = r(\cos x + i \sin x)$, on a :

$$r(\cos x + i \sin x) . r'(\cos x' + i \sin x') = rr'[\cos(x + x') + i \sin(x + x')],$$

$$\frac{r(\cos x + i \sin x)}{r'(\cos x' + i \sin x')} = \frac{r}{r'}\left[\cos(x - x') + i \sin(x - x')\right],$$

$$[r(\cos x + i \sin x)]^n = r^n(\cos nx + i \sin nx).$$

3.3.8 Exemples de calculs.

1 On sait : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ *Déterminons* **Arg** j^2, **Arg** j^3.

On a : $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$

d'où : $j^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$ et **Arg** $j^2 = \frac{4\pi}{3}\cdot$

soit : $j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

On remarque : $j^2 = \bar{j}$;

on a en outre : $j^3 = \cos 3.\frac{2\pi}{3} + i\sin 3\frac{2\pi}{3};$

il en résulte : $j^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi,$

soit : $j^3 = 1$ et **Arg** $j^3 = 0$.

2 *Déterminons les nombres* $|z|$ *et* **Arg** z *de* $z = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$.

On a : $(1 + i\sqrt{3}) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right],$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]:$$

d'où : $|z| = 4$ et **Arg** $z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$

Il en résulte : $z = 4i$.

En calculant directement le produit indiqué, on trouve bien $z = 4i$.

3 *Déterminons les nombres* $|z|$ *et* **Arg** z *de* $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\cdot$

D'après les calculs précédents, on a :

$$|z| = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } \mathbf{Arg}\, z = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\cdot$$

il en résulte : $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\cdot$

En calculant directement le quotient indiqué, on trouve bien ce résultat.

4 ***Déterminons le module et l'argument de $z = (1 + i\sqrt{3})^{122}$.***

On sait que : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

d'où : $|z| = 2^{122}$,

et : $\mathbf{arg}\, z = \widehat{\frac{122\pi}{3}}$.

Cherchons la détermination principale de arg z :

$$\frac{122\pi}{3} = 40\pi + \frac{2\pi}{3};$$

d'où : $\mathbf{Arg}\, z = \frac{2\pi}{3}$,

il en résulte : $z = 2^{122}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$,

$$z = 2^{122}.j.$$

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = 1 - i; \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

1° On a : $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$;

d'où : $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\mathbf{Arg}\, z_1 = \frac{11\pi}{6}$,

$|z_2| = \sqrt{2}$ et $\mathbf{Arg}\, z_2 = \frac{7\pi}{4}$,

soit : $|z| = 1$ et $\mathbf{Arg}\, z = \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Le nombre z s'écrit donc sous forme trigonométrique :

$$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}.$$

2° Calculons $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ en utilisant les règles de calcul définies sur le corps $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2\,(1 + i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})\,(1 - i)}{2\,(1 + i)\,(1 - i)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

3° La comparaison des deux résultats obtenus entraîne :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

EXERCICES

3.1 Mettre sous forme normale et sous forme trigonométrique :

a) $\dfrac{1 + i}{1 - j^2}$; $\dfrac{(1 + i)^3}{(1 - i)} + \dfrac{(1 - i)^4}{(1 + i)^2}$; $\dfrac{1 + j}{(1 - i)^2} + \dfrac{1 - j}{(1 + i)^2}$.

b) $\dfrac{[\cos a + i\,(1 + \sin a)]^3}{1 - \sin 3a + i\cos 3a}$. $\left(\text{On pourra poser } \varphi = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}.\right)$

3.2 Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3})\,(\sin x + i\cos x)}{2\,(1 - i)\,(\cos x - i\sin x)}, \quad x \text{ nombre réel.}$$

3.3 Calculer :

a) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^3$; $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{32}$; $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^8$.

b) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$; $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{31}$; $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{1972}$

c) $(1 + i)^{20}$; $(1 - i)^{20}$; $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^{12}}{(1 + i)^{20}} + \dfrac{(-1 - i\sqrt{3})^{12}}{(1 - i)^{20}}$.

3.4 Calculer le module et l'argument de :

a) $z = \dfrac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; $z_0 = \dfrac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4}}$; $z_1 = \dfrac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{2\pi}{3}}$.

b) $Z = \dfrac{z - z_0}{z - z_1}$, avec $z = \dfrac{1 + ix}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} + ix\left(1 + i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)}$, x réel.

3.5 Calculer le module et l'argument de :

$$a\frac{1+ib}{1-ib},\ a \text{ et } b \text{ étant des réels.}$$

3.6 Calculer le module et l'argument de :

$$\alpha = i + \sqrt{3};\quad \beta = 2i - \alpha;\quad \gamma = 2i + \alpha;\quad \delta = \frac{\gamma}{\beta}.$$

3.7 Calculer le module et l'argument de :

$$z = \frac{i - \sqrt{3}}{(i + \sqrt{3})^5}.$$

3.8 Mettre sous forme trigonométrique les produits suivants

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$(1 - i\sqrt{3})(1 - i)(\cos\varphi - i \sin\varphi),$$

φ étant un nombre réel fixé.

3.9 Mettre sous forme trigonométrique :

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin x + i \sin x)}{2(1 - i)(\cos x - i \sin x)},$$

x étant un nombre réel fixé..

3.10 Démontrer que tout nombre complexe de module 1 peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}\quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3.11 Mettre sous forme normale le nombre complexe z :

$$z = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}}.$$

Calculer z^3.

3.12 Calculer :

$$\frac{\cos x - i \sin x}{\sin y - i \cos y};\quad \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x - i \cos x},$$

x et y étant des nombres réels fixés.

3.13 Sachant que $|z_1| = |z_2|$ et que $z_1 z_2$ est différent de -1, exprimer en fonction des arguments $\mathring{\theta}_1$, $\mathring{\theta}_2$ de z_1 et z_2 :

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2},$$

3.14 Soit z un nombre complexe de module 1 dont la détermination principale de l'argument est α. Calculer le module et l'argument du nombre : $Z = 1 + z + z^2$.

3.15 En considérant le produit $(\sin 3x + i \sin x)(\cos 3x + i \cos x)$, établir l'identité :

$$(\sin^2 3x + \cos^2 x)(\cos^2 3x + \cos^2 x) = \sin^2 2x . (4 \cos^2 2x + \cos^2 4x).$$

3.16 On donne :

$$A = (1 + i)^n, \quad B = (1 + \bar{i})^n.$$

En utilisant la forme trigonométrique, donner les différentes valeurs de A et de B suivant les valeurs de l'entier naturel n.

3.17 Soit le nombre complexe $u(|u| = 1)$, et soit $A = (1 + u)^n$ et $B = (1 + \bar{u})^n$. Calculer de deux manières différentes A et B et en déduire les sommes :

$$\mathcal{S}_1 = C_n^0 + C_n^1 \cos a + C_n^2 \cos 2a + \cdots$$

$$\mathcal{S}_2 = C_n^1 \sin a + C_n^2 \sin 2a + \cdots$$

3.18 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n l'expression $(i + \sqrt{3})^n$ est-elle : un nombre réel positif? un nombre réel négatif? un nombre imaginaire pur?

3.19 On donne l'expression :

$$A = (1 + i)^n - (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Démontrer que A permet de calculer la somme :

$$S = C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \cdots$$

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\mathcal{S} = 0$?

3.20 En utilisant l'expression $B = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$, calculer :

$$1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \cdots$$

3.21 Calculer les sommes :

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=1}^{n} \sin kx; \quad \mathcal{S}_2 = \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

3.22 Calculer les sommes :

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \cos kx; \quad \mathcal{S}_2 = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \sin kx.$$

3.23 Calculer, pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{S}_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos 2nx}{\cos^{2n} x},$$

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x}.$$

(On pourra former : $-1 + \mathcal{S}_n + i\,\Sigma_n$.)

3.24 Soit l'expression définie par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos(a_k + x).$$

où les a_k sont des nombres réels.

Démontrer que :

$$[\mathrm{f}(x) = 0 \text{ et } \mathrm{f}(x') = 0] \implies x \equiv x' \quad [\pi].$$

(On pourra, en développant f(x), démontrer que l'on peut écrire :

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{A} \cos x - \mathrm{B} \sin x,$$

et l'on formera $\mathrm{A} + i\mathrm{B}$.)

3.25 On désigne par $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ les sommes suivantes :

$$\mathcal{S}_1 = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^6 + \cdots; \quad \mathcal{S}_2 = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^4 + \mathrm{C}_n^7 + \cdots;$$

$$\mathcal{S}_3 = \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 - \cdots.$$

1° Démontrer que :

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 = 2^n,$$

$$\mathcal{S}_1 + j\mathcal{S}_2 + j^2\mathcal{S}_3 = (1 + j)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

2° En déduire, en fonction de n, les valeurs de :

$$\mathcal{S}_1, \quad \mathcal{S}_2, \quad \mathcal{S}_3.$$

$\left(\text{On rappelle que } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et que } 1 + j + j^2 = 0.\right)$

3.4 APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

3.4.1 Calcul de cos nx et de sin nx, x étant réel ($n = 2$, $n = 3$, $n = 4$).

L'emploi combiné de la formule de MOIVRE et de la formule du binôme permet d'exprimer, pour tout entier naturel n, cos nx et sin nx en fonction des nombres cos x et sin x.

■ $n = 2$.

On a : $$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x,$$

soit :

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x = \cos 2x + i \sin 2x,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

REMARQUE. cos $2x$ s'exprime rationnellement en fonction de cos x, mais sin $2x$ ne s'exprime pas rationnellement en fonction de sin x.

■ $n = 3$.

On a : $$\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3.$$

Comme :

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

il en résulte : $$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x,$$

et, après transformation :

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

REMARQUE. $\cos 3x$ s'exprime rationnellement en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ s'exprime rationnellement en fonction de $\sin x$.

Calcul de $\operatorname{tg} 3x$.

On a :

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3\cos^2 \sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

On constate que $\operatorname{tg} 3x$ s'exprime comme une fraction rationnelle en $\operatorname{tg} x$.

■ $\boldsymbol{n = 4}$.

Les coefficients du développement du binôme pour $n = 4$ sont :

$$C_4^0 = 1; \quad C_4^1 = 4; \quad C_4^2 = 6; \quad C_4^3 = 4; \quad C_4^4 = 1;$$

les puissances de i sont :

$$i^1 = 1, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

On a, d'après la formule de MOIVRE :

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x.$$

On obtient, dans le développement de $z = (\cos x + i\sin x)^4$, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z :

$$\mathfrak{R}(z) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = \cos 4x,$$

$$\mathfrak{I}(z) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^2 x = \sin 4x;$$

d'où :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\,(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2,$$

et :

$$\boldsymbol{\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.}$$

La formule : $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^2 x$

peut s'écrire : $\sin 4x = 4\sin x \cos x.(\cos^2 x - \sin^2 x)$,

$$\boldsymbol{\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x,}$$

qui ne s'exprime pas rationnellement en fonction de $\sin x$.

Calcul de $\operatorname{tg} 4x$.

On obtient :

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$$

3.4.2 Complément : étude du cas général.

D'une façon générale, pour n entier naturel, on peut calculer les nombres $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des nombres $\cos x$ et $\sin x$ pour tout réel x fixé.

La formule du binôme peut s'écrire, pour tout couple (a, b) d'éléments d'un anneau commutatif :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

avec : $C_n^k =$ ———.

On a : $$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k} x \sin^k x,$$

avec : $i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = (-1)^p\, i.$

La formule de MOIVRE :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

permet d'obtenir par égalités respectives des parties réelles et des parties imaginaires :

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \cdots,$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin 3x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - C_n^7 \cos^{n-7} x \sin^7 x + \cdots.$$

Le dernier terme de chaque expression dépend de la *parité* de l'entier naturel n.

EXERCICES.

■ EXERCICE RÉSOLU.

Démontrer que : $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}.$

1° On a : $$z = (\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x.$$

Développons le binôme $(\cos x + i \sin 5x)^5$. On obtient :

$$\mathfrak{R}(z) = \cos^5 x - C_5^2 \cos^3 x \sin^2 x + C_5^4 \cos x \sin^4 x.$$

$$\mathfrak{R}(z) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x,$$

$$\mathfrak{I}(z) = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Il en résulte, en particulier :

$$\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x,$$

soit, si $\sin x$ est différent de zéro :

$$\sin 5x = \sin^5 x\,[5 \operatorname{cotg}^4 x - 10 \operatorname{cotg}^2 x + 1].$$

2° Déterminons les réels x, de l'intervalle $[0, \pi[$, tels que :

$$\sin 5x = 0 \text{ et } \sin x \neq 0.$$

On obtient l'ensemble $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Pour chacun des réels $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$, il en résulte que :

$$5 \operatorname{cotg}^4 x - 10 \operatorname{cotg}^2 x + 1 = 0,$$

d'où, en utilisant le produit des racines de cette équation :

$$\operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{cotg}^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{5},$$

ou :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{5} = 5,$$

et, finalement : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$,

car : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > 0$ et $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} > 0$.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

En utilisant sin $5x$ *établir que :*

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.4.3 Linéarisation des polynomes trigonométriques.

Soit x un réel fixé et soit les nombres complexes conjugués :

$$z = \cos x + i \sin x, \quad \bar{z} = \cos x - i \sin x = \frac{1}{z}.$$

On a :

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (1) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad (2) \end{aligned}\right\} \text{I}$$

Considérons la fonction f, définie sur $\mathbb{U}^*$, telle que :

$$\mathrm{f}(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^p \left(z - \frac{1}{z}\right)^q.$$

On a :

$$\mathbf{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} + z\right)^p \left(\frac{1}{z} - z\right)^q,$$

$$\mathbf{f}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^q \left(\frac{1}{z} + z\right)^p \left(z - \frac{1}{z}\right)^q,$$

d'où : $$\mathbf{f}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^q\, \mathbf{f}(z).$$

En utilisant la formule du binôme, il est possible de développer $\mathbf{f}(z)$.

Le développement obtenu contient des termes en z^λ et en $\frac{1}{z^\mu}$ avec :

$$0 \leqslant \lambda \leqslant p + q,$$

$$0 \leqslant \mu \leqslant p + q.$$

1° *Si q est pair*, on a :

$$\mathbf{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathbf{f}(z).$$

A tout terme en z^λ correspond un terme de *même coefficient réel* a_λ en $\frac{1}{z^\lambda}$ et l'on obtient :

$$a_\lambda \left(z^\lambda + \frac{1}{z^\lambda}\right) = 2a_\lambda \cos \lambda x.$$

L'expression $y = \cos^p x \sin^q x$ s'exprime en une somme de termes du type $a_\lambda \cos \lambda x$.

2° *Si q est impair*, on a :

$$\mathbf{f}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathbf{f}(z).$$

A tout terme en z^λ correspond un terme de *même coefficient réel* b_λ en $\frac{1}{z^\lambda}$ et l'on obtient :

$$a_\lambda \left(z^\lambda - \frac{1}{z^\lambda}\right) = 2a_\lambda\, i \sin \lambda x.$$

L'expression $y = \cos^p x \sin^q x$ s'exprime en une somme de termes du type $a_\lambda \sin \lambda x$ (exemple précédent).

EXEMPLE. *Soit à linéariser le monôme* $y = \cos x \sin^4 x$.
On obtient successivement :

$$y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{2^4 i^4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^4,$$

$$y = \frac{1}{2^5}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right),$$

$$z = \frac{1}{2^5}\left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) - 3\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 2\left(z + \frac{1}{z}\right)\right],$$

$$y = \frac{1}{2^4}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x).$$

L'exposant de $\sin x$ dans l'expression donnée étant pair, on a obtenu une somme algébrique de termes du type $\cos \lambda x$.

3.4.4 Notation e^{ix}.

1 Au n° **3.2.1**, nous avons établi l'existence d'un homomorphisme surjectif θ du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, homomorphisme dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

On a : $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{U}$

$x \longmapsto \theta(x) = u,$

soit : $\theta(x) = \cos x + i \sin x,$

et pour tout couple (x, x') de $\mathbb{R}^2$:

$\theta(x + x') = uu',$

avec : $\theta(x') = u'.$

2 Posons : $\theta(x) = e^{ix},$

soit : $\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x},$

e étant la base de la fonction exponentielle, isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+*}$ (Analyse, Terminale CDE, n° **8.2.1**).

Cette notation donne en particulier :

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1 \iff e^0 = 1;$$

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \iff e^{i\frac{\pi}{2}} = i;$$

$$\cos\pi + i\sin\pi = -1 \iff e^{i\pi} = -1.$$

Les relations suivantes :

$$(\cos x + i \sin x)(\cos x' + i \sin x') = \cos (x + x') + i \sin (x + x')$$

$$\cos x - i \sin x = \bar{u} = \frac{1}{u}$$

sont respectivement traduites par :

$$e^{ix}.e^{ix'} = e^{i(x+x')},$$

$$e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}.$$

3 Des relations :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

il résulte :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Ces formules, dites d'Euler, sont souvent utilisées dans les calculs trigonométriques. (Reprendre les exercices n°s 3.21 à 3.24.)

EXEMPLE. *Soit à linéariser :* $y = \cos x \sin^4 x$.

On obtient :

$$y = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\frac{1}{(2i)^4}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$y = \frac{1}{2^5}(e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$y = \frac{1}{2^5}(e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})$$

$$y = \frac{1}{2^5}[(e^{5ix} + e^{-5ix}) - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$y = \frac{1}{2^4}(\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x).$$

---

4 Posons par définition :

$$\exp (a + ib) = e^a (\cos b + i \sin b),$$

que l'on note : e^{a+ib}.

Au nombre complexe $z = a + ib$, on fait correspondre le nombre complexe $e^a(\cos b + i \sin b)$: cet homomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ prolonge l'homomorphisme « exp » de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On notera que :

$$|z| = e^a \quad \text{et} \quad a = \text{Log}\,|z|.$$

NOTA. — On trouvera en Analyse, Terminale CDE (n° **9.3.3**) une autre introduction de la notation e^{ix}.

EXERCICES

Linéariser les monômes ou polynomes suivants :

3.26 $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 x$; $\sin^4 x$.

3.27 $\cos^4 x \sin x$; $\cos^4 x \sin^3 x$; $\sin^2 x \cos^3 x$.

3.28 $3 \cos^3 x \sin^3 x - 2 \cos^4 x \sin^2 x$.

*

3.29 Exprimer linéairement :

$$2^{2m} \cos^{2m} x; \quad (-1)^m\, 2^{2m} \sin^{2m} x, \quad m \text{ entier naturel.}$$

3.30 Exprimer linéairement :

$$2^{2m+1} \cos^{2m+1} x; \quad (-1)^m\, 2^{2m+1} \sin^{2m+1} x, \quad m \text{ entier naturel.}$$

PROBLÈMES

3.31 1° On considère l'expression :

$$\cos 2x = 2X^2 - 1 \ (\cos x = X).$$

Résoudre de deux façons l'équation définie par $\cos 2x = 0$ et démontrer que la donnée de $\cos x$ détermine $\cos 2x$ sans ambiguïté. En est-il de même de la donnée de $\sin x$ pour $\sin 2x$?

2° On considère l'expression :

$$\cos 3x = 4X^3 - 3X \quad (\cos x = X).$$

Démontrer que la donnée de $\cos x$ détermine $\cos 3x$ sans ambiguïté et qu'il en est de même de $\sin x$ pour $\sin 3x$.

3° Démontrer que la donnée de $\cos x$ détermine $\cos nx$ sans ambiguïté pour tout entier naturel n et que la donnée de $\sin x$ détermine $\sin nx$ sans ambiguïté si, et seulement si, n est impair. Que conclure pour l'expression de $\cos nx$, de $\sin nx$ respectivement en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$?

3.32 1° Exprimer $\sin 9x$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$.

2° Établir que $\sin 9x = 0$ et $\cos x \neq 0$ est équivalent à :

$$C_9^1 \operatorname{cotg}^9 x - C_9^3 \operatorname{cotg}^6 x + C_9^5 \operatorname{cotg}^4 x - C_9^7 \operatorname{cotg}^2 x + C_9^9 = 0.$$

3° Démontrer que :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9} = 3.$$

4° Démontrer, en utilisant la même méthode, que :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{6\pi}{13} = \sqrt{13}.$$

3.33 Développer $x(x + 1)^n$, n entier naturel. En déduire les sommes suivantes :

$$\mathcal{S}_1 = \cos x + C_n^1 \cos 2x + \cdots + C_n^{n-1} \cos nx + \cos(n + 1)x,$$

$$\mathcal{S}_2 = \sin x + C_n^1 \sin 2x + \cdots + C_n^{n-1} \sin nx + \sin(n + 1)x.$$

3.34 1° Exprimer $\sin 3a$ et $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$. Écrire la relation (E) liant $x = \sin\frac{a}{5}$ et $\alpha = \sin a$.

2° En transformant le produit p en une somme, calculer :

$$p = \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}.$$

3° Retrouver la valeur de p à l'aide de l'équation définie par (E) en posant $\alpha = \frac{1}{2}$.

4° Soit m un entier naturel impair. Démontrer que $\sin mx$ s'exprime par un polynome P_m en $X = \sin x$ ne renfermant que des puissances impaires (récurrence). Exprimer P_7 en fonction de X.

5° On pose : $u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{\sin 2a}{\sin a}, \ldots, \quad u_n = \frac{\sin na}{\sin a} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Démontrer que :

$$(u_n)^2 - u_{n-1}u_{n+1} = 1.$$

6° On considère les polynomes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = x, \quad Q_3 = xQ_2 - Q_1, \ldots, \quad Q_{n+1} = xQ_n - Q_{n-1},$$

avec : $-\pi \leqslant a \leqslant \pi$. On pose $x = 2\cos a$.

Exprimer $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ à l'aide de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

4 APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

4.1 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES

4.1.1 Plan vectoriel euclidien et argument d'un nombre complexe.

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté, identifié au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes à l'aide d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormée directe.

■ Soit z un nombre complexe non nul dont le vecteur image est $\vec{v}$ et soit φ une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$:

$$\varphi \in \mu\,\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})};$$

(on lit : **φ élément de mesure de l'angle $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$**).

Au vecteur $\vec{v}$ correspond un couple unique (a, b) de nombres réels tel que :

$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2.$$

On a : $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = a \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{e}_2 = b,$

d'où : $a = \|\vec{v}\| \operatorname{Cos} \widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})},$

$b = \|\vec{v}\| \operatorname{Sin} \widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})},$

soit encore : $a = \|\vec{v}\| \cos \varphi,$

$b = \|\vec{v}\| \sin \varphi.$

■ Le nombre complexe z, affixe du vecteur $\vec{v}$ est tel que :

$$z = a + ib,$$

soit :

$$z = \|\vec{v}\| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \qquad |z| = \|\vec{v}\|. \tag{1}$$

Le nombre complexe $\cos \varphi + i \sin \varphi$ a pour module 1.

Or, tout nombre complexe non nul z peut s'écrire :

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \qquad \alpha \in \arg z. \tag{2}$$

En comparant les égalités (1) et (2), et compte tenu du fait que :

$$|z| = \|\vec{v}\|,$$

il en résulte les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \alpha & (3) \\ \sin \varphi = \sin \alpha. & (4) \end{cases}$$

Les relations (3) et (4) expriment :

a) que le réel α est *une mesure* de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{v}})$;
b) que le réel φ est *un argument* du nombre z.

On peut conclure :

> **Dans un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$, muni d'une base orthonormée directe $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit $\vec{v}$ le vecteur image du nombre complexe z, non nul.**
>
> **On a, entre $\vec{v}$ et z, les relations suivantes :**
>
> $$|z| = \|\vec{v}\| ;$$
>
> $$\arg z = \mu(\widehat{\vec{e}_1, \vec{v}}).$$

■ Dans le cas où le nombre z est un élément du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, l'ensemble des vecteurs images des nombres z est le cercle trigonométrique vectoriel noté $(\mathcal{U}, \mathfrak{B})$. $\mathcal{U}$ étant l'ensemble des vecteurs unitaires de $\vec{P}$ et $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant une base orthonormée directe.

L'application $\mathfrak{f}$, qui à tout élément u de $\mathbb{U}$ de vecteur image $\vec{v}$ fait correspondre l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{v}})$, est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ sur le groupe additif $\mathcal{A}$ des angles.

4.1.2 Plan affine euclidien et argument d'un nombre complexe.

■ Dans un plan affine euclidien orienté P, identifié à $\mathbb{C}$ à l'aide du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, si M est le point image du nombre complexe z, il en résulte par un raisonnement identique au précédent que :

$$\begin{cases} |z| = \|\overrightarrow{OM}\| = d(O, M) \\ \arg z = \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}). \end{cases}$$

On peut conclure :

1° Lorsqu'on exprime z sous la forme cartésienne :

$$z = x + iy,$$

x et y sont les coordonnées du point M et :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = |z|$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\overline{OP} = x,$$
$$\overline{OQ} = y \qquad (\textit{fig. 1}).$$

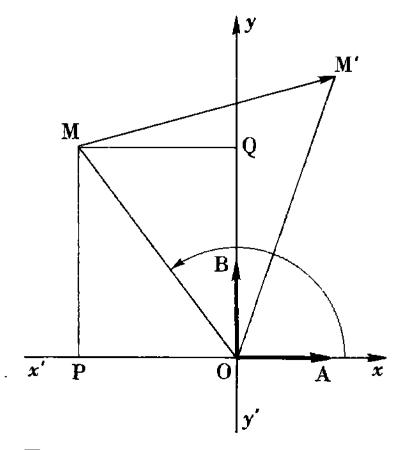
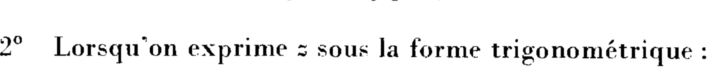


Fig. 1



2° Lorsqu'on exprime z sous la forme trigonométrique :

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \qquad \alpha \in \arg z,$$

α est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ et l'on a :

$$\arg z = \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}).$$

■ Dans le plan affine euclidien orienté P, identifié à $\mathbb{C}$, le sous-groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}^*$ a pour image le cercle trigonométrique du plan affine.

■ Soit deux points distincts M et M', d'affixes respectives z et z' ; le vecteur image $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $Z = z' - z$; d'où :

$$\arg Z = \arg (z' - z),$$

$$\arg Z = \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}}).$$

4.1.3 Représentations de nombres complexes. Exercices.

■ IMAGES DE NOMBRES COMPLEXES.

1 Dans le plan affine identifié à $\mathbb{C}$, à l'aide du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, représentons les images respectives des éléments de l'ensemble $E = \{1, j, j^2\}$

On a : $|j| = |j^2| = 1.$

Les points images A, M, N, d'affixes respectives $1, j, j^2$, sont donc des éléments de la figuration du cercle trigonométrique du plan affine (*fig. 2*).

On a :

a) $\operatorname{Arg} j = \frac{2\pi}{3}$;

une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ est $\frac{2\pi}{3}\cdot$

b) $\operatorname{Arg} j^2 = \frac{4\pi}{3}$;

une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}})$ est $\frac{4\pi}{3}\cdot$

Remarquons que :

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}}) - (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}});$$

donc, une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ est $\frac{2\pi}{3}$, et :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$$

$$= (\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}}),$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\|.$$

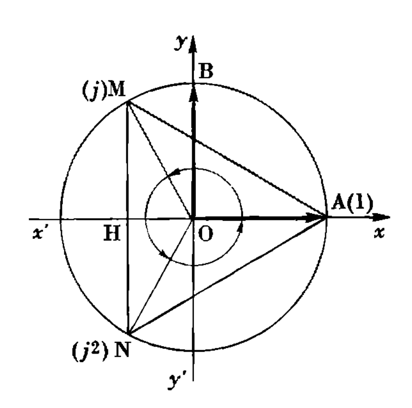


Fig. 2

Le triangle défini par $\{A, M, N\}$ est un triangle équilatéral; le triplet (A, M, N) est un triangle équilatéral de sens direct (*fig. 2*). On établit de même que l'ensemble des images des éléments de $F = \{1, i, -1, -i\}$ définit un carré.

■ DU PLAN AFFINE P VERS LE CORPS $\mathbb{C}$.

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose :

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \qquad \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad P^* = P - \{O\}.$$

EXERCICE

■ EXERCICE RÉSOLU. (*On utilisera les notations ci-dessus.*)

Soit k un nombre réel strictement positif. On considère la transformation ponctuelle T_k *qui, au point m de* P^*, *associe le point* M *de* P^* *défini par :*

$$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}}) & (1) \\ \|\overrightarrow{OM}\| . \|\overrightarrow{Om}\| = k. & (2) \end{cases}$$

Exprimer le nombre Z, *affixe du point* M, *en fonction du nombre complexe z, affixe du point m.*

On a :

$$\arg z = \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}),$$

$$\arg Z = \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}).$$

Les relations (1) et (2) entraînent respectivement les relations :

$$\begin{cases} \arg z = -\arg Z & (1') \\ |Z| . |z| = k. & (2') \end{cases}$$

qui sont équivalentes à :

$$Z = \frac{k}{z}. \qquad (3)$$

Cette relation définit sur $\mathbb{C}^*$ une application :

$$f_k : z \longmapsto \frac{k}{z},$$

qui est une involution de $\mathbb{C}^*$.

Remarquons que la relation (3) permet d'exprimer le couple (X, Y) des coordonnées de M en fonction des coordonnées x et y de m :

$$Z = \frac{k}{z} = \frac{k}{z\bar{z}}\bar{z} = \frac{k\bar{z}}{|z|^2},$$

soit :

$$(X, Y) = \left(\frac{kx}{x^2 + y^2}, \frac{-ky}{x^2 + y^2}\right).$$

■ DU CORPS $\mathbb{C}$ VERS LE PLAN AFFINE P IDENTIFIÉ À $\mathbb{C}$.

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose :

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \qquad \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}, \qquad P^* = P - \{O\}.$$

EXERCICE

EXERCICE RÉSOLU.

Avec les notations ci-dessus, déterminer l'ensemble des points* M *d'affixe z telle que les points* B, M, M′ *d'affixes i, z, iz soient strictement alignés. (Les points* B, M, M′ *sont distincts.)

Les vecteurs $\overrightarrow{BM'}$, $\overrightarrow{BM}$, d'affixes respectives $iz - i$, $z - i$, sont linéairement dépendants; d'où : $\overrightarrow{BM'} = \lambda\overrightarrow{BM}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

soit : $$iz - i = \lambda(z - i). \quad (1)$$

La relation (1) entraîne, en particulier :

$$\arg(iz - i) = \arg\lambda + \arg(z - i),$$
$$\arg i + \arg(z - 1) = \arg\lambda + \arg(z - i),$$
$$\arg(z - 1) - \arg(z - i) = \arg\lambda - \arg(i).$$

Deux cas sont à envisager :

a) $\lambda > 0$.

D'où : $\arg\lambda = \dot{0}, \quad \dot{0} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};$

or : $\arg i = \widehat{\dfrac{\pi}{2}};$

d'où : $\arg\lambda - \arg i = \widehat{\dfrac{3\pi}{2}},$

et : $\arg(z - 1) - \arg(z - i) = \widehat{\dfrac{3\pi}{2}};$

soit, en mesure d'angle :

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) - \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BM}}) = \widehat{\frac{3\pi}{2}}, \quad \mu(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{\frac{3\pi}{2}}.$$

Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}})$ est $\dfrac{3\pi}{2}$. (2)

b) $\lambda < 0$.

D'où : $\arg\lambda = \dot{\pi}, \quad \dot{\pi} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$

On obtient alors : $\mu(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = \widehat{\dfrac{\pi}{2}}.$

Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}})$ est $\dfrac{\pi}{2}$. (3)

Il en résulte que la réunion des cas *a*) et *b*) entraîne pour tout point M :

$$\mu(\widehat{MB, MA}) = \frac{\pi}{2}, \text{ et réciproquement.}$$

L'ensemble des points M, tels que les points distincts B, M, M′ soient alignés est le cercle Γ de diamètre [A, B] privé des éléments A et B (*fig.3*).

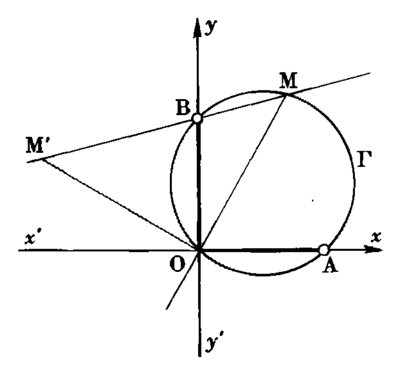


Fig. 3

■ INTERPRÉTATION DANS P DU PRODUIT mn DE DEUX NOMBRES COMPLEXES NON NULS.

Soit M et N les points d'affixes respectives m et n. Le nombre complexe $q = mn$ a pour point-image Q. (*fig. 4*).

On a : $q = mn$,

d'où : $\begin{cases} |q| = |m| \,.\, |n| \\ \arg q = \arg m + \arg n, \end{cases}$

soit : $\begin{cases} \|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \,.\, \|\overrightarrow{ON}\| \quad \text{ou} \quad OQ = OM \,.\, ON \\ \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}}) = \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) + \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}}). \end{cases}$

On en déduit :

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{ON}{OA} \qquad (OA = 1), \tag{1}$$

et : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}})$,

soit : $$(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}). \tag{2}$$

Le vecteur $\overrightarrow{NQ}$ a pour affixe $q - n$; or :

$$q - n = n(m - 1);$$

$m - 1$ a pour vecteur-image $\overrightarrow{AM}$; d'où :

$$NQ = ON \,.\, AM \iff \frac{NQ}{AM} = \frac{ON}{OA},$$

soit, compte tenu de la relation (1) :

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{NQ}{AM} = \frac{ON}{OA}. \tag{3}$$

D'autre part, la relation :

$$\arg (q - n) = \arg n + \arg (m - 1)$$

implique successivement :

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{NQ}}) = \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}}) + \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}),$$

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{NQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}),$$

$$(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}), \tag{4}$$

soit : $$(\widehat{\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NO}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}}). \tag{5}$$

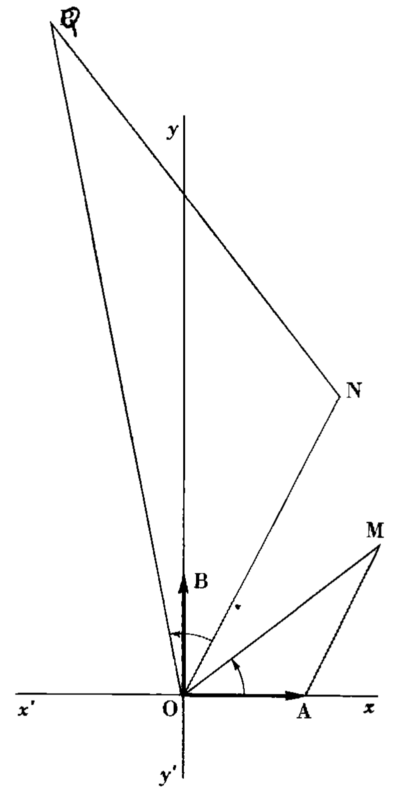


Fig. 4

A l'aide des relations (2) et (4), on déduit :

$$\widehat{(\overrightarrow{QN}, \overrightarrow{QO})} = \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})}.$$

REMARQUES. — **1** On peut en utilisant la commutativité du produit mn, établir d'autres relations du même type.

2 Le produit mn sera également interprété au cours de l'étude des similitudes planes directes.

EXERCICES

Dans tous les exercices ou problèmes, on appelle plan complexe P *le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, *identifié à* $\mathbb{C}$.

4.1 Étudier, dans le plan complexe P, les applications de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}^*$ définies respectivement par :

a) $z \longmapsto \bar{z}$;

b) $z \longmapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$;

c) $z \longmapsto \dfrac{k}{\bar{z}}$, k étant un réel non nul.

4.2 On désigne par M, A, B les images respectives dans le plan complexe des trois nombres z, a, b. Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument du nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - a}{z - b}.$$

Application. Construire le point m d'affixe z tel que le nombre $Z = \dfrac{z + 2i}{z - i}$ soit tel que :

$$|Z| = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2}.$$

4.3 Dans le plan complexe P, le point A a pour affixe a, le point M a pour affixe z. Quel est l'ensemble des points M pour que le point M' d'affixe Z telle que $Z = \left(\dfrac{z}{z - a}\right)^2$ soit :

a) un point de l'axe des réels ?

b) un point de l'axe des imaginaires purs ?

4.4 Quel est l'ensemble des points M d'affixe z pour que le nombre $Z = \left(\dfrac{z}{z - 1}\right)^3$ soit réel ?

4.5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, tels que le nombre complexe $Z = \left(\dfrac{z + 1 + i}{2z + 1 - i}\right)^2$ soit réel ? (Solution analytique et solution géométrique.)

4.6 En utilisant le fait qu'une mesure de l'angle (AB, AC) est nulle si et seulement si A, B, C sont alignés, démontrer que, a, b, c étant les affixes respectives des points A, B, C, le nombre complexe $Z = \dfrac{b - a}{c - a}$ est réel.

4.7 Les points distincts A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si une mesure non nulle de l'angle (AB, AC) est égale à une mesure de l'angle (DB, DC). Démontrer que, a, b, c, d étant les affixes respectives des points A, B, C, D, le nombre complexe $Z = \dfrac{b - a}{c - a} : \dfrac{b - d}{c - d}$ est réel, chacun des nombres $\dfrac{b - a}{c - a}$, $\dfrac{b - d}{c - d}$ n'étant pas réel.

4.8 Soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$. Démontrer que les images dans le plan complexe de z, $-z$, z^2, $\dfrac{2}{z}$ sont situées sur un même cercle.

4.9 Soit $Z = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}\cdot$ Quel est l'ensemble des points m d'affixe z si Z est réel ? Quel est l'ensemble des points m d'affixe z si Z est imaginaire pur ? (Solution analytique et solution géométrique.)

4.10 Soit $Z = \dfrac{z - 4}{z + 1}\cdot$ Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des images m des nombres complexes z tels que :

a) $|Z| = \sqrt{2}$;

b) $\operatorname{Arg} Z = \dfrac{3\pi}{4}\cdot$

4.11 On considère l'application f définie par :

$$z \longmapsto z_1 = \frac{z + 1}{z - 1}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{1\}.$$

Dans le plan complexe, m est l'image de z, M est l'image de z_1 et les points A et B ont pour affixes respectives -1 et $+1$. On appelle **T** l'application de P vers P associée à l'application **f**.

1° Établir que T est, sur un ensemble E, une involution. Quel est l'ensemble des points m pour que $|z_1| = \sqrt{2}$?

2° Quel est l'ensemble des points m pour que le réel $-\dfrac{\pi}{4}$ soit un argument de z_1 ?

4.12 Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = \dfrac{1}{i + \operatorname{tg} \alpha}\cdot$

où α est un nombre réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quel est, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z lorsque α varie ? En déduire une construction simple du point image A de $z_0 = \dfrac{1}{i + \operatorname{tg} \dfrac{7\pi}{8}}\cdot$

4.13 On donne la relation $Z = z\dfrac{5z - 4}{5 - 4z}$ et les points suivants dont les affixes sont indiquées entre parenthèses :

$$m(z), \qquad M(Z), \qquad A(1), \qquad m_1(5z - 4), \qquad m_2(5 - 4z).$$

1° Démontrer que les points A, m, m_1, m_2 sont alignés.

2° Le point μ a pour affixe $\dfrac{1}{z}$ et le point B, $\dfrac{4}{5}$. Quel est l'ensemble des points m pour que Z soit réel (on démontrera que B, μ, m sont alignés).

3° Quel est l'ensemble des points m pour que $|z| = |Z|$?

4.14 Le plan P est le plan complexe. Soit T l'application de P vers P qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$ $(z \neq 0)$, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$zz' = ia^2,$$

où a est un réel strictement positif.

1° Démontrer que :

$$\|\overrightarrow{OM}\| . \|\overrightarrow{OM'}\| = a^2 ;$$

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) + \mu(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}}) = \dot{\frac{\pi}{2}}, \qquad \dot{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

L'application T est-elle, sur $P^* = P - \{O\}$, une involution ?

2° Démontrer que T admet deux points double A et A′, que l'on précisera.

3° Démontrer que les coordonnées (x, y) de M et celles (x', y') de son transformé $M' = T(M)$ sont liées par les relations :

$$xx' - yy' = 0 \quad \text{et} \quad xy' + x'y = a^2.$$

Retrouver les points doubles de T en les obtenant comme intersections de deux courbes. Calculer x et y en fonction de a, x' et y'.

4.2 RACINES $n^{\text{ièmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

4.2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

■ Soit un nombre complexe fixé z *non nul* et soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe z tout nombre complexe Z dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est égale à z :

$$Z^n = z, \qquad z \in \mathbb{C}^*, \qquad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}. \qquad \textbf{(1)}$$

L'équation ainsi définie sur $\mathbb{C}^*$ est une **équation binôme**; les solutions de cette équation sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z.

■ Exprimons le nombre fixé z sous forme trigonométrique :

a) r est le module de z :

$$r = |z|, \qquad r \in \mathbb{R}^{*+} ;$$

b) θ est un argument de z :

$$\theta \in \arg z.$$

Il en résulte :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

De même, tout nombre Z, solution éventuelle de l'équation (1), peut s'écrire :

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \rho = |Z| \quad \text{et} \quad \varphi \in \arg Z.$$

■ Tout nombre Z est une racine $n^{\text{ième}}$ de z si et seulement si :

$$\rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{cases} \rho^n = r & (2) \\ n\varphi = \theta + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. & (3) \end{cases}$$

On sait, qu'étant donné un nombre réel r strictement positif, il existe *un* et *un seul* nombre réel positif ρ tel que :

$$\rho^n = r, \quad \text{soit :} \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

D'autre part, l'égalité (3) est équivalente à :

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour une valeur fixée k_1 de l'entier k, le nombre complexe Z_{k_1}, tel que :

$$Z_{k_1} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k_1\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k_1\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

est *une* racine $n^{\text{ième}}$ de $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

■ Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$, pour deux valeurs fixées de k distinctes, k_1 et k_2, on obtient les nombres Z_{k_1}, Z_{k_2} de *même* module; les réels :

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{n} + k_1\frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_2 = \frac{\theta}{n} + k_2\frac{2\pi}{n}$$

sont *des* arguments respectifs de Z_{k_1} et de Z_{k_2}.

Si l'on a :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lambda.2\pi, \qquad \lambda \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

φ_1 et φ_2 sont des représentants de la même classe de réels modulo 2π.

Il en résulte :

$$\arg Z_{k_1} = \arg Z_{k_2},$$

ce qui entraîne $Z_{k_1} = Z_{k_2}$ car :

$$|Z_{k_1}| = |Z_{k_2}|.$$

La relation (4) est équivalente à :

$$\left(\frac{\theta}{n} + k_1\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\frac{\theta}{n} + k_2\frac{2\pi}{n}\right) = \lambda.2\pi,$$

$$k_1 - k_2 = \lambda n,$$

ou : $$k_1 \equiv k_2 \pmod{n}.$$

Les entiers k_1 et k_2, tels que $k_1 - k_2 = \lambda n$, définissent *la même racine* $n^{\text{ième}}$ de z.

Il suffit d'attribuer au nombre entier k, par exemple, les n valeurs consécutives de l'intervalle $[0, n-1]$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ pour obtenir, à partir d'un argument fixé θ de z, toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z.

On peut conclure :

> **Tout nombre complexe non nul :**
>
> $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
>
> **admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ qui s'expriment sous la forme trigonométrique générale :**
>
> $$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$
>
> **avec, par exemple :**
>
> $$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Cette conclusion exprime également que, dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$, l'équation définie par :

$$Z^n - a = 0, \qquad a \in \mathbb{C}^*$$

a *n racines distinctes.*

4.2.2 Représentation des racines $n^{\text{ièmes}}$.

Soit P un plan affine euclidien orienté identifié à $\mathbb{C}$, à l'aide du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (*fig.* 5).

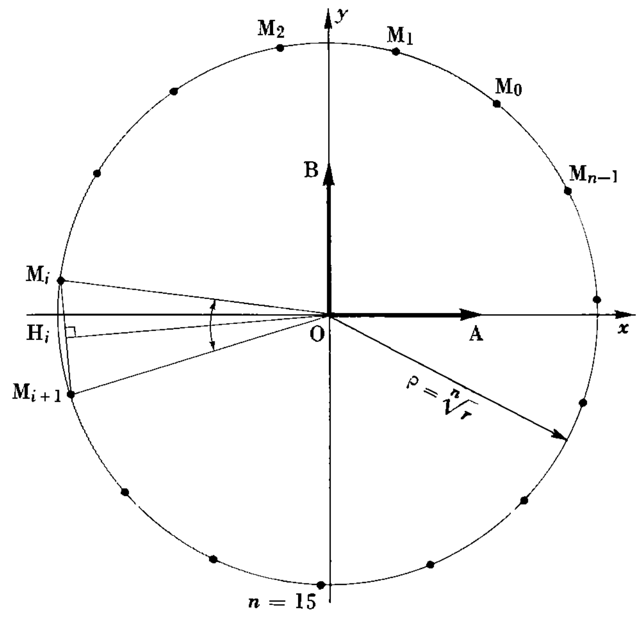


Fig. 5

Soit M_k l'image de la racine $n^{\text{ième}}$ Z_k de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

■ Quel que soit k, élément de l'intervalle $[0, n-1]$ de $\mathbb{N}$:

$$|z_k| = \sqrt[n]{r}\,;$$

il en résulte que tous les points images $M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$. sont situés sur le cercle de centre O et de rayon $\rho = \sqrt[n]{r}$.

■ Soit i et $i + 1$ deux valeurs consécutives de k, i étant un nombre de l'intervalle $I = [0, n - 1[$ de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Soit Z_i, Z_{i+1} les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z correspondantes, et soit φ_i et φ_{i+1} les arguments respectifs de Z_i et de Z_{i+1} tels que :

$$\varphi_i = \frac{\theta}{n} + i\,\frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_{i+1} = \frac{\theta}{n} + i + 1\,\frac{2\pi}{n}.$$

On appelle M_i, M_{i+1} les points images de Z_i et de Z_{i+1}.

On a :

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = (i + 1 - i)\,\frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{2\pi}{n}.$$

Cette relation entraîne que $\frac{2\pi}{n}$ est un représentant de la mesure $\mu(\widehat{\overrightarrow{OM}_{i+1}, \overrightarrow{OM}_i})$ de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}_{i+1}, \overrightarrow{OM}_i})$:

$$\frac{2\pi}{n} \in \mu(\widehat{\overrightarrow{OM}_{i+1}, \overrightarrow{OM}_i}), \quad \text{pour tout } i \text{ de I.}$$

■ Les images $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|z|}$.

Tout segment $[M_{i+1}, M_i]$ est un *côté* de ce polygone et le réel $\frac{2\pi}{n}$ est une mesure de « *l'angle au centre* ». La hauteur $[O, H_i]$ du triangle isocèle (M_i, O, M_{i+1}) est appelée *apothème* du polygone régulier. Le point O est le *centre* du polygone régulier.

EXEMPLE. *Déterminer les racines cubiques du nombre complexe* $z = 1 + i$. *Représenter géométriquement les racines obtenues.*

On a : $$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right);$$

d'où : $$|z| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} \in \arg z.$$

Les racines cubiques du nombre $1 + i$ s'écrivent sous la forme trigonométrique générale :

$$Z_k = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right], \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2;$$

d'où : $$Z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$Z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$Z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Les points images étant respectivement M_0, M_1, M_2, on obtient dans le plan complexe le triangle équilateral $\{M_0, M_1, M_2\}$ tel qu'un représentant de la mesure $\mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0}})$ soit le réel $\frac{\pi}{12}$, A étant le point d'affixe 1 (*fig. 6*).

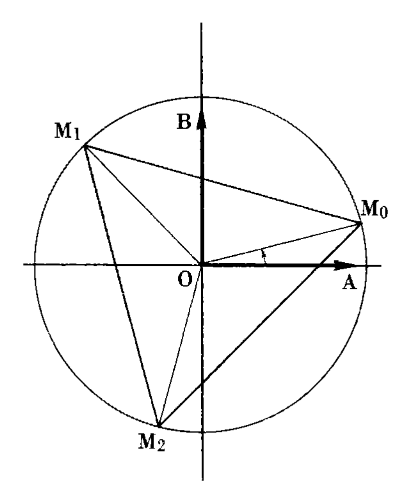


Fig. 6

4.2.3 Racines cubiques de l'unité.

■ DÉTERMINATION.

Étudions les trois racines cubiques du nombre complexe 1, notées ω_0, ω_1, ω_2. Le nombre complexe 1 a pour module 1 et un argument de 1 est le réel 0. Il en résulte que, ω_k étant une racine cubique de 1, on a :

$$\omega_k = 1\left[\cos k\frac{2\pi}{3} + i\sin k\frac{2\pi}{3}\right], \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2.$$

On obtient : $$\omega_0 = 1(\cos 0 + i\sin \theta) = 1,$$

$$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On remarque que :

$$\omega_1^2 = \omega_2 = \overline{\omega}_1$$

et que : $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0.$

On note : $\boldsymbol{\omega_1 = j}$,

d'où : $\boldsymbol{\omega_2 = j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}}$;

par suite : $\mathbf{1 + j + j^2 = 0}$.

L'ensemble $\mathcal{U}_3$ des racines cubiques de l'unité est :

$$\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}.$$

■ PROPRIÉTÉS.

1 L'équation dans $\mathbb{C}$, définie par $z^3 - 1 = 0$, admet donc pour racines les nombres $1, j, j^2$.

On a : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$

La racine 1 annule le facteur $z - 1$. L'égalité $1 + j + j^2 = 0$ montre que j annule le second facteur. D'autre part :

$$j^4 = j^3 . j = 1 . j = j;$$

d'où : $j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0;$

j^2 annule le second facteur.

2 L'ensemble $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ des racines cubiques de 1 a une structure de groupe multiplicatif ainsi que la montre la table suivante :

$\cdot$	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j^3

Le groupe $(\mathcal{U}_3, .)$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, .)$.

3 Considérons le groupe additif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dont les éléments sont les classes $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}$.

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ l'application de $\mathcal{U}_3$ vers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que :

$$\boldsymbol{\varphi}(1) = \dot{0}, \qquad \boldsymbol{\varphi}(j) = \dot{1}, \qquad \boldsymbol{\varphi}(j^2) = \dot{2}.$$

On a : $\boldsymbol{\varphi}(j \times j^2) = \boldsymbol{\varphi}(1) = \dot{0};$

or : $\boldsymbol{\varphi}(j) + \boldsymbol{\varphi}(j^2) = \dot{1} + \dot{2} = \dot{0}.$

En étudiant les autres cas, il en résulte que φ est un *isomorphisme* du groupe multiplicatif $\mathcal{U}_3$ sur le groupe additif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

■ REPRÉSENTATION (*fig.* 7).

1 Les points images A, M, N des nombres 1, j, j^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral dont O est l'équibarycentre; d'où :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0};$$

cette relation implique dans $\mathbb{C}$:

$$1 + j + j^2 = 0 \text{ (relation déjà établie).}$$

2 Le fait que : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

entraîne que : $\|\overrightarrow{OH}\| = \frac{1}{2}$ et $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{3}$,

[O, H] étant l'apothème du triangle équilatéral {A, M, N} et le segment [M, N] étant un côté de ce triangle.

Fig. 7

4.2.4 Racines quatrièmes de l'unité.

■ DÉTERMINATION.

Étudions les quatre racines quatrièmes de l'unité, notées ω_0, ω_1, ω_2, ω_3. Toute racine quatrième ω_k de 1 s'écrit :

$$\omega_k = \cos k\frac{2\pi}{4} + i \sin k\frac{2\pi}{4}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 3.$$

On a :

$$\omega_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$\omega_2 = \cos\pi + i \sin\pi = -1,$$

$$\omega_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

On remarque : $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$

L'ensemble $\mathcal{U}_4$ des racines quatrièmes de l'unité est :

$$\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}.$$

Les images A, B, A', B' des éléments de $\mathcal{U}_4$ sont les sommets d'un carré dont O est l'équibarycentre.

■ **PROPRIÉTÉS.**

L'ensemble $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, i\}$ des racines quatrièmes de 1 a une structure de groupe multiplicatif ainsi que le montre la table suivante :

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Le groupe $(\mathcal{U}_4, .)$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, .)$.

EXERCICES

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation définie par :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \qquad (1)$$

On a, pour tout nombre complexe z, dans le corps $\mathbb{C}$:

$$(z^3 + z^2 + z + 1)(z - 1) = z^4 - 1.$$

Les solutions de l'équation (1) sont celles de l'équation binome (2) : $z^4 - 1 = 0$, privées de la racine $\omega_0 = 1$.

Les racines quatrièmes de l'unité étant : $1, i, -1, -i$, il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (1) est :

$$S = \{i, -1, -i\}.$$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Démontrer que le groupe multiplicatif $\mathcal{U}_4$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4.2.5 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Étudions, dans le cas général, les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous noterons ces n racines :

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_{n-1} ;$$

nous noterons $\mathcal{U}_n$ l'ensemble de ces racines, avec pour tout entier k de l'intervalle $[0, n - 1[$ de $\mathbb{N}$:

$$\omega_k = 1\left(\cos k\frac{2\pi}{n} + i \sin k\frac{2\pi}{n}\right).$$

■ Toute racine ω_k peut s'écrire, d'après la formule de Moivre :

$$\omega_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k, \qquad k \in [0, n-1].$$

Or : $$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

d'où : $$\omega_k = \omega_1^k, \qquad k \in [0, n-1].$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{U}_n = \{\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{n-1}\}$ peut-être engendré par $\{\omega_1\}$.

EXEMPLES.

I. $n = 3$. Alors : $\omega_1 = j$.

On a : $\omega_0 = j^0 = 1, \quad \omega_1 = j, \quad \omega^2 = \omega_1^2 = j^2$,

et $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.

On remarque, ici, que $\{j^2\}$ engendre aussi $\mathcal{U}_3$.

II. $n = 4$. Alors : $\omega_1 = i$.

On a : $\omega_0 = i^0 = 1, \quad \omega_1 = i, \quad \omega_2 = i^2 = -1, \quad \omega_3 = i^3 = -i$,

et : $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

On remarque, ici, que $\{-1\}$ n'engendre pas $\mathcal{U}_4$.

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}_6$ des racines sixièmes de l'unité. Peut-on choisir arbitrairement une racine pour engendrer $\mathcal{U}_6$?

■ On a, dans le corps commutatif $\mathbb{C}$, pour tout nombre z différent de 1 :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}. \qquad (1)$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :

$$\mathcal{U}_n = \{1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{n-1}\}.$$

On a : $$S = \sum_0^{n-1} \omega_k = \sum_0^{n-1} \omega_1^k,$$

S étant la somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Soit :

$$1 + \omega_0 + \cdots + \omega_k + \cdots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1^2 + \cdots \omega_1^k + \cdots + \omega_1^{n-1}.$$

On a, d'après (1) :

$$S = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1}, \qquad \omega_1 \neq 1;$$

or : $\omega_1^n = 1$, d'où : $S = 0$.

La somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle.

EXERCICE.

■ **EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.**

Soit le nombre $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$. *On pose :*

$$S = z + z^2 + z^4, \quad T = z^3 + z^5 + z^6.$$

Calculer S + T *et* ST.

Calculer S (*un dessin peut aider à distinguer* S *de* T).

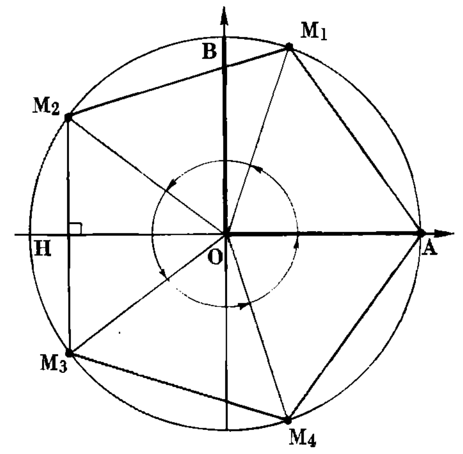
Remarque. — Il en résulte, dans le plan affine euclidien identifié à $\mathbb{C}$, que la somme des vecteurs images des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \cdots + \overrightarrow{OM}_k + \cdots + \overrightarrow{OM}_{n-1} = \vec{0}.$$

Cette propriété est une propriété de tout polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et dont les sommets sont :

$$A, M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}.$$

Le point O est l'*équibarycentre* des *n* sommets (*fig. 8*).



Points-images des racines cinquièmes de 1.

Le polygone A M1 M2 M3 M4 est un pentagone d'apothème [O,H].

Fig. 8.

4.2.6 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe z et racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

■ Soit un nombre z non nul. Il admet n racines $n^{\text{ièmes}}$.
Soit Z_{k_1} une racine fixée et Z_k une racine $n^{\text{ième}}$ quelconque. On a les deux égalités :

$$(Z_{k_1})^n = z \quad \text{et} \quad (Z_k)^n = z,$$

avec k appartenant à l'intervalle $[0, n-1]$.

Il en résulte : $(Z_k)^n = (Z_{k_1})^n, \qquad Z_{k_1} \neq 0;$

d'où : $$\left(\frac{Z_k}{Z_{k_1}}\right)^n = 1.$$

Le nombre complexe $\dfrac{Z_k}{Z_{k_1}}$ est donc une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité que nous notons ω_k.

On obtient : $Z_k = Z_{k_1} \times \omega_k, \quad k_1$ fixé et $k \in [0, n-1]$.

On peut conclure :

> **On peut obtenir les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.**

EXERCICES

■ EXERCICE RÉSOLU.

Déterminer les racines cubiques du nombre -8.

Une racine cubique de -8 est le réel -2. Les racines cubiques de 1 sont $1, j, j^2$.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des racines cubiques de -8 est :

$$\mathcal{S} = \{-2, -2j, -2j^2\}.$$

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Déterminer les racines quatrièmes de 16.

■ Calculons la somme S des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de z.

On a :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k = \sum_{0}^{n-1} Z_{k_1}.\omega_k = Z_{k_1}.\sum_{0}^{n-1} \omega_k;$$

or : $$\sum_{0}^{n-1} \omega_k = 0;$$

d'où : $$S = 0.$$

La somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul z est nulle.

Dans le plan euclidien P identifié à $\mathbb{C}$, si M_k est l'image d'une racine quelconque Z_k, la propriété précédente se traduit par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OM}_k = \vec{0}.$$

Par conséquent, pour tout polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O, le point O est l'*équibarycentre des points images.*

■ Chacune des n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe z, écrit sous forme trigonométrique $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, s'exprime par la forme générale :

$$Z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$Z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}\right).$$

On a : $$Z_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

et : $$\omega_1^k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad \text{d'ou : } Z_k = Z_0 . \omega_1^k.$$

On retrouve le résultat établi précédemment car θ étant *un argument quelconque* de z, Z_0 est l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z.

4.2.7 Racines carrées d'un nombre complexe *z* non nul.

■ *Le nombre z est donné sous forme trigonométrique.*

1 Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta \in \arg z.$

Le problème posé revient à résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation définie par :

$$Z^2 - z = 0, \qquad z \text{ fixé.} \tag{1}$$

Nous en ferons une étude directe. Le nombre Z étant exprimé sous forme trigonométrique $|Z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, l'équation (1) est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| & (2) \\ 2\varphi = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. & (3) \end{cases}$$

L'égalité (2) donne un nombre réel positif unique :

$$|Z| = \sqrt{|z|},$$

et la relation (3) implique l'existence de deux arguments distincts. Les réels φ_1 et φ_2, tels que :

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{\theta}{2} + \pi,$$

sont des représentants respectifs.

2 Il existe donc deux nombres complexes Z_0 et Z_1, solutions de l'équation $Z^2 - z = 0$ tels que :

$$Z_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$Z_1 = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right],$$

ou : $$Z_1 = -\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right);$$

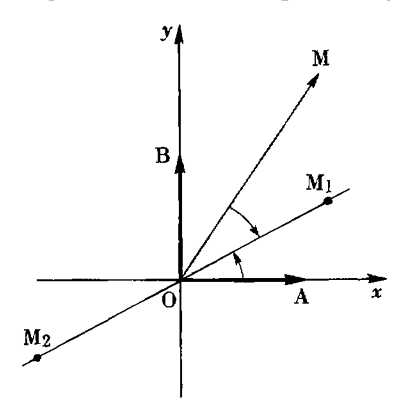
d'où : $$Z_1 = -Z_0.$$

On conclut : **les nombres Z_1 et Z_0 sont opposés.**

3 Les points images M_0 et M_1 sont symétriques par rapport à O, origine du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; en outre :

$$\varphi_1 \in \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}_0}) \quad \text{et} \quad \varphi_2 \in \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}_1});$$

comme $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, il en résulte que la droite définie par les points images M_1 et M_2 est la droite bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$, M étant le point image du nombre complexe z (*fig. 9*).



EXEMPLES. I. *Soit à déterminer les racines carrées du nombre* $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

On a $|z| = 1$ et $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z. D'où :

$$|Z_1| = |Z_2| = 1, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{9\pi}{8}.$$

Les racines carrées de $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sont :

$$Z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$Z_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8} = -Z_1.$$

II. *Soit à déterminer les racines carrées de i.*

On a : $|z| = 1 \implies |Z_1| = |Z_2| = 1$;

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

D'où : $Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$,

$$Z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

■ *Le nombre z est exprimé sous la forme a + ib.*

Posons $Z = x + iy$, x et y étant des réels. On a :

$$Z^2 = (a + ib) \qquad (1)$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b. & (3) \end{cases}$$

Notons qu'en outre :

$$|Z|^2 = |z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (4)$$

a) Si $b = 0$ et $a > 0$, les deux racines carrées sont les réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

b) Si $b = 0$ et $a < 0$, les deux racines carrées sont les imaginaires purs $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ (déjà étudié au n° **2.3.3**).

c) Si $b \neq 0$, il en résulte :

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0.$$

Première méthode.

Le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

est équivalent au système :

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{2x} & (3') \\ x^4 - ax^2 - \dfrac{b^2}{4} = 0. & (5) \end{cases}$$

L'équation bicarrée (5) admet, quels que soient les réels a et b ($b \neq 0$), deux racines réelles dont *une*, et une seule, est *strictement* positive. A cette racine correspondent deux valeurs x_1 et $-x_1$ de x et par suite deux couples :

$$(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad (-x_1, -y_1).$$

En conclusion, ***on obtient pour tout nombre complexe non nul deux racines carrées opposées, et deux seulement.***

EXEMPLE. *Soit à déterminer les racines carrées de* $z = 5 + 12i$.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ xy = 6; & (2) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{x} & (2') \\ x^4 - 5x^2 - 36 = 0. & (3) \end{cases}$$

On obtient $x^2 = 9$ et, par suite, les couples :

$$(3, 2), \qquad (-3, -2).$$

Les racines carrées du nombre complexe $5 + 12i$ sont :

$$3 + 2i \quad \text{et} \quad -3 - 2i.$$

Deuxième méthode.

Considérons le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b, & (3) \end{cases}$$

auquel nous adjoignons la relation :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (4)$$

Les relations (2) et (4) donnent :

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Ces valeurs ne sont pas négatives car :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant |a|,$$

l'inégalité stricte étant réalisée si : $b \neq 0$.

Il faut associer x et y de telle sorte que le ***produit*** xy ait le ***signe de*** b.

EXEMPLE. *Soit à déterminer les racines carrées du nombre complexe* $z = -7 - 24i$.

Soit $Z = x + iy$ une racine carrée de z.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 25 ; \end{cases}$$

d'où :

$$x^2 = \frac{1}{2}(-7 + 25) = 9.$$

On obtient les couples :

$$(3, -4) \quad \text{et} \quad (-3, 4) ;$$

d'où les racines carrées de $z = -7 - 24i$:

$$Z_1 = 3 - 4i \quad \text{et} \quad Z_2 = -3 + 4i.$$

EXERCICE.

■ EXERCICE RÉSOLU. *Soit le nombre complexe* $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. *En exprimant de deux manières différentes les racines carrées de z, calculer :*

$$\cos\frac{\pi}{8}, \qquad \sin\frac{\pi}{8}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

1° En utilisant la forme trigonométrique $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ de z, nous avons précédemment calculé les racines carrées Z_1 et Z_2 de $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$:

$$Z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} ;$$

$$Z_2 = -Z_1.$$

2° Utilisons la forme cartésienne $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. Posons $Z = x + iy$, l'une des racines de z.

On a :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

d'où :
$$x^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right] \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right],$$
$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

x et y doivent être choisis de même signe. Or les réels $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ sont positifs car :
$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}; \text{ d'où : } \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

On obtient :
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Remarque. — Ce calcul ne diffère pas de celui utilisé en classe de Première pour résoudre le problème suivant.

Soit φ *la rotation vectorielle du plan vectoriel euclidien orienté* $\vec{\mathbf{P}}$, *définie par :*
$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles ψ *telles que* $\psi \circ \psi = \varphi$ (Aleph$_0$, Géométrie 1ère CDE, n° **10.2.4**).

EXERCICE.

■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.

Justifier la remarque précédente.

EXERCICES

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

4.15 i; $1 + i$; $9 + 40i$; $7 - 24i$; $40 - 42i$.

4.16 $\frac{1+i}{1-i}$; $\frac{1+j}{1-j}$; $-2(1 + i\sqrt{3})$.

4.17 $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants

4.18 $-i$; $1+i$; $2+11i$; -27.

4.19 $2(1+i)$; $1+j$; $\dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

4.20 $18+26i$; $11+2i$; $-2+2i$.

4.21 $4\sqrt{2}(-1+i)$. Donner le module et l'argument de chaque racine.

*

Calculer les racines quatrièmes des nombres complexes suivants :

4.22 $28-96i$; $2-i\sqrt{12}$; $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.23 $i+\sqrt{3}$; $3+4i$; $24i-7$;
$8\sqrt{2}(1-i)$; $28-96i$; $1+4i\sqrt{5}$.

*

4.24 Étudier les racines cubiques de $z=a+ib$. En déduire la résolution du système défini sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ 3x^2y-y^3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4.25 Soit le nombre complexe :

$$Z=8a^2-(1+a^2)^2+4a(1-a^2)i, \qquad a\in\mathbb{R}.$$

1° Calculer le module du nombre Z; si α est un argument de Z, calculer :

$$\cos\alpha, \qquad \sin\alpha, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha\sin\alpha,$$

en fonction du réel a et démontrer que :

$$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{a+1}{\sqrt{2(1+a^2)}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1-a}{\sqrt{2(1+a^2)}}.$$

2° En déduire les racines quatrièmes du nombre Z.

4.26 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par : $x^4+x^2+1=0$.

4.27 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par : $x^8+x^4+1=0$.
En déduire que x^8+x^4+1 peut se décomposer en un produit de quatre facteurs du second degré à coefficients réels.

4.28 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $x^5+1=0$; *b*) $z^6=\sqrt{3}+i$; *c*) $x^7+\sqrt{3}-i=0$;

d) $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; *e*) $z^5=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})$.

4.29 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$z^7 = \bar{z}.$$

(Déterminer d'abord $|z|$.)

4.30 Le nombre z est un nombre complexe. Développer $(z + 1)^3$ et en déduir la résolution, sur $\mathbb{C}$, de l'équation définie par :

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0.$$

Construire les images des racines.

4.40 1° Soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines complexes $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Démontrer que la restriction de la loi multiplicative du corps $\mathbb{C}$ confère à $\mathcal{U}_n$ une structure de groupe. Démontrer que ce groupe est *cyclique*, c'est-à-dire qu'il admet une partie génératrice réduite à un seul élément.

2° Démontrer qu'une condition nécessaire est suffisante pour que $\{\omega_p\}$ engendre le groupe $\mathcal{U}_n$ est que p et n soient premiers entre eux (ω_p étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité). Démontrer que si n est un nombre premier, alors le groupe $\mathcal{U}_n$ est engendré par n'importe quelle racine différente de 1.

4.32 On pose $u = \cos \dfrac{2\pi}{17} + i \sin \dfrac{2\pi}{7}\cdot$ Chacune des sommes qui suivent est un réel dont on formera une expression ne contenant que des racines carrées comme irrationnels.

1° Calculer : $\quad S = \sum_{k=1}^{k=16} u^k.$

2° Calculer : $\quad T = u^2 + u^4 + u^8 + u^{16} + \cdots + u^{2k} + \cdots + u^{256};$

$$T' = u^6 + u^{12} + u^{24} + \cdots + u^{6k} + \cdots + u^{768}.$$

(On calculera $T + T'$ et $T.T'$.)

4.33 *a*) Calculer la somme :

$$\mathcal{S}(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2}, \qquad x \in \mathbb{C}.$$

b) Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$x^{2n} - 1 = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que : $\quad \mathcal{S}(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos k \dfrac{\pi}{n} + 1\right)\cdot$

c) En considérant $\mathcal{S}(1)$, démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin k \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\cdot$$

d) En considérant $\mathcal{S}(i)$, calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos k \frac{\pi}{n}\cdot$$

4.3 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS LE CORPS $\mathbb{C}$

4.3.1 Résolution de l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par $az + b = 0$.

Soit l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$az + b = 0, \tag{1}$$

a et b étant des nombres complexes fixés.

L'ensemble $\mathbb{C}$ étant un corps commutatif, la discussion et la résolution de cette équation sont identiques à celles de l'équation définie sur le corps commutatif $\mathbb{R}$ des réels par :

$$ax + b = 0.$$

Il en résulte :

Si : $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est :

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

Si : $(a, b) \in \{0\} \times \mathbb{C}^*$, on a :

$$\mathcal{S} = \varnothing.$$

Si : $(a, b) = (0, 0)$, alors $\mathcal{S} = \mathbb{C}$ si aucune restriction n'intervient pour le choix du nombre z.

EXEMPLE. *Soit à résoudre l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par :*

$$\frac{z}{3 + 4i} + \frac{z - 1}{5i} = \frac{5}{3 - 4i}.$$

On a, successivement :

$$\frac{z(3 - 4i)}{25} - \frac{(z - 1)5i}{25} = \frac{5(3 + 4i)}{25},$$

$$z(3 - 4i) - 5i(z - 1) = 5(3 + 4i),$$

$$z(3 - 4i - 5i) = 15 + 20i - 5i,$$

$$3z(1 - 3i) = 15(1 + i),$$

$$z(1 - 3i)(1 + 3i) = 5(1 + i)(1 + 3i),$$

$$10z = 10(-1 + 2i) \iff z = -1 + 2i.$$

4.3.2 Résolution de l'équation du second degré, sur $\mathbb{C}$, à coefficients complexes.

■ 1° Soit l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que :

$$z \longmapsto az^2 + bz + c,$$

a, b et c étant des nombres complexes fixés et a étant non nul.

On cherche à déterminer dans $\mathbb{C}$ le sous-ensemble $\mathcal{S}$ tel que :

$$\overset{-1}{\mathrm{f}}\ \{(0)\} = \mathcal{S}.$$

En utilisant les règles de calcul dans un corps, cherchons à obtenir, pour le polynome $\mathrm{f}(z) = az^2 + bz + c$, une expression de la forme :

$$Z^2 - d^2 = (Z + d)(Z - d),$$

dans laquelle d est un nombre complexe déterminé en fonction du triplet (a, b, c).

2° On a, pour tout nombre z, a étant non nul :

$$4a\,\mathrm{f}(z) = 4a^2z^2 + 4abz + 4ac,$$

$$4a\,\mathrm{f}(z) = (2az + b)^2 + 4ac - b^2,$$

$$4a\,\mathrm{f}(z) = (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Le nombre complexe $b^2 - 4ac$ a *toujours deux racines carrées opposées*, sauf si $b^2 - 4ac = 0$ (n° **4.2.7**).

Soit d l'une des racines carrées de $b^2 - 4ac$:

$$d^2 = b^2 - 4ac.$$

On a : $$4a\,\mathrm{f}(z) = (2az + b)^2 - d^2,$$

ou, pour tout nombre z :

$$4a\,\mathrm{f}(z) = (2az + b + d)(2az + b - d).$$

■ On a $\mathrm{f}(z) = 0$ si et seulement si :

$$4a\,\mathrm{f}(z) = 0,$$

soit : $$(2az + b + d)(2az + b - d) = 0.$$

Tout corps étant un *anneau d'intégrité*, cette équation admet dans $\mathbb{C}$ deux, et seulement deux solutions z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-b - d}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + d}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, alors $d = 0$ et l'équation admet une racine d'ordre deux : le nombre $-\frac{b}{2a}\cdot$

On peut énoncer :

THÉORÈME / **Pour a non nul, l'équation du second degré à coefficients complexes, définie par :**

$$az^2 + bz + c = 0,$$

admet deux racines z_1 et z_2 exprimées par :

$$z_1 = \frac{-b - d}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + d}{2a},$$

où d et $-d$ désignent les racines carrées du nombre $b^2 - 4ac$.

Si : $b^2 - 4ac \neq 0$, alors : $z_1 \neq z_2$.

Si : $b^2 - 4ac = 0$, alors : $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

REMARQUES. — **1** On obtient aisément :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}\cdot$$

Réciproquement, si l'on fixe trois nombres complexes a, b, c ($a \neq 0$), les nombres complexes u_1, u_2, tels que :

$$u_1 + u_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad u_1 u_2 = \frac{c}{a},$$

sont les racines de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

En effet, l'équation définie par :

$$(z - u_1)(z - u_2) = 0,$$

admet u_1 et u_2 pour racines. Or :

$$(z - u_1)(z - u_2) = z^2 - (u_1 + u_2)z + u_1 u_2;$$

d'où :
$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0,$$

et :
$$az^2 + bz + c = 0.$$

2 Il en résulte que, résoudre sur $\mathbb{C}$ le système (I) défini par

$$\text{(I)} \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p, \end{cases}$$

où s et p sont des nombres complexes fixés, revient à résoudre l'équation définie par :

$$u^2 - su + p = 0. \tag{2}$$

Le système (I) a donc toujours deux couples solutions :

$$(u', u'') \quad \text{et} \quad (u'', u'),$$

u' et u'' étant les racines de l'équation (2).

3 Si $b = 2b'$, alors :

$$d^2 = 4(b'^2 - ac) = 4d'^2 ;$$

d'où :

$$d'^2 = b'^2 - ac,$$

d' étant une racine carrée de $b'^2 - ac$.

On a alors :

$$z_1 = \frac{-b' - d'}{a},$$

$$z_2 = \frac{-b' + d'}{a}.$$

4.3.3 Équation du second degré à coefficients réels sur $\mathbb{C}$.

1 Rappelons que le cas où l'équation s'exprime sous la forme :

$$z^2 = a, \qquad a \text{ réel}$$

a été étudié au n° 3.3.3.

a) Si : $a > 0$, il existe deux racines réelles opposées :

$$z_1 = -\sqrt{a},$$

$$z_2 = \sqrt{a}.$$

b) Si : $a < 0$, il existe deux racines imaginaires pures conjuguées

$$z_1 = -i\sqrt{-a},$$

$$z_2 = i\sqrt{-a}.$$

2 Dans le cas général, si :

$$f(z) = az^2 + bz + c, \quad (a, b, c \text{ réels et } a \neq 0),$$

on obtient comme au paragraphe précédent :

$$4a\,f(z) = (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est réel.

a) Si : $\Delta > 0$, l'équation définie par $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines réelles qui sont acceptables puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Si : $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle d'ordre deux exprimée par :

$$-\frac{b}{2a}.$$

c) Si : $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles, mais :

$$b^2 - 4ac = (-1)(-\Delta) = i^2(-\Delta)$$

admet deux racines carrées opposées :

$$i\sqrt{-\Delta} \quad \text{et} \quad -i\sqrt{-\Delta}.$$

L'équation définie par $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes *conjuguées* :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

REMARQUE. — Ce résultat est un cas particulier de l'étude des zéros d'un polynome P(*z*) à coefficients réels (n° **3.3.5** (2)).

4.3.4 Exemples de résolution d'équations du second degré.

■ Soit l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0.$$

α) Calculons le nombre $b'^2 - ac$.

On a : $\quad b'^2 - ac = (3 - 2i)^2 - (1 - i)(9 - 7i),$

soit : $\quad b'^2 - ac = 3 + 4i.$

β) Déterminons les racines carrées du nombre $3 + 4i$.

Posons : $d^2 = (x + iy)^2 = 3 + 4i$,

d'où : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ et $x^2 + y^2 = 5.$

Le nombre $d = 2 + i$ est une racine carrée de $3 + 4i$.

γ) Les racines de l'équation sont :

$$z' = \frac{(3 - 2i) - (2 + i)}{1 - i} = 2 - i,$$

$$z'' = \frac{(3 - 2i) + (2 + i)}{1 - i} = 3 + 2i.$$

■ **Lorsque l'équation proposée le permet, il est préférable de faire une étude directe, sans faire appel aux formules.**
[On utilisera souvent l'identité : $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.]

1° Soit à résoudre l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

On obtient successivement :

$(z - \cos\varphi)^2 + 1 - \cos^2\varphi = 0,$

$(z - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = (z - \cos\varphi + i\sin\varphi)(z - \cos\varphi - i\sin\varphi).$

Les racines de l'équation considérée sont les nombres conjugués :

$$z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad z_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

2° Soit à résoudre l'équation définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0,$$

soit : $$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = \left(x + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 0;$$

d'où les deux racines conjuguées suivantes :

$$x_1 = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad x_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

4.3.5 Applications.

■ EXERCICE RÉSOLU.

On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ des racines cinquièmes de l'unité :

$$\mathcal{G} = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}.$$

Déterminer l'équation du second degré qui admet $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$ pour racines. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et celle de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Calculons : $(\omega + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^3) = s,$

et : $(\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = p.$

On a : $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = s;$

or : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0;$

d'où : $s = -1,$

et :

$$(\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^7 = \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 = -1.$$

D'après la remarque **2** du n° **4.3.2**, l'équation cherchée est définie par : $z^2 + z - 1 = 0,$

et admet les racines réelles suivantes :

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Considérons le pentagone régulier associé à l'ensemble $\mathcal{G}$ (*fig. 10*).

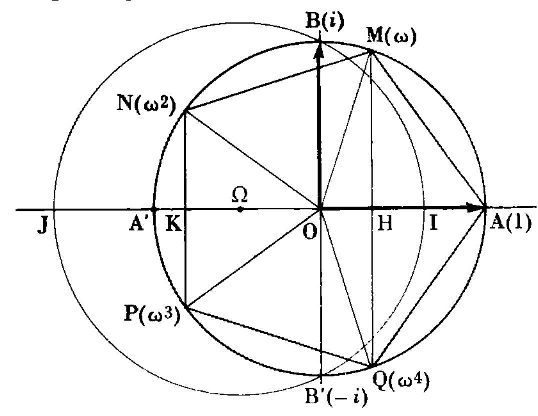


Fig. 10

On a, par raison de symétrie :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH}.$$

Or le vecteur $\overrightarrow{OH}$ a pour affixe $(\omega + \omega^4)$ et H appartient à l'axe défini par le bipoint (O, A).

On a :

$$2\overline{OH} = \omega + \omega^4,$$

et :
$$\omega + \omega^4 > 0 \implies \omega + \omega^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

D'autre part :

$$\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5},$$

d'où :
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

On obtient en outre, en raisonnant de même :

$$\overline{OK} = \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Remarque. — Les résultats précédents permettent de construire à la règle et au compas le pentagone régulier AMNPQ. Il suffit de construire les racines de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

Le cercle de centre Ω, point d'affixe $-\frac{1}{2}$, contenant les points B et B′ du cercle trigonométrique, coupe l'axe défini par le bipoint (O, A) en I et J.

On a :
$$\overline{OI}.\overline{OJ} = -1,$$
$$\overline{OI} + \overline{OJ} = 2\overline{O\Omega} = 1.$$

Les nombres $\overline{OI}$ et $\overline{OJ}$ sont donc les racines de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ et la médiatrice de [O, I] coupe le cercle trigonométrique en M et Q; de même, la médiatrice de [O, J] détermine les points N et P.

■ **EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.**

Le nombre ω ayant la même signification que dans l'exercice résolu précédent, former l'équation du quatrième degré qui admet pour racines les éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$ tel que :

$$\mathcal{S} = \{(1 + \omega)^2, \ (1 + \omega^2)^2, \ (1 + \omega^3)^2, \ (1 + \omega^4)^2\}.$$

4.3.6 Résolution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

Nous étudierons uniquement un cas numérique.

Soit à résoudre l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\cos x + 3 \sin x - 1{,}8 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Soit z un complexe de module 1 et dont un argument est x. On a :

$$z = \cos x + i \sin x; \tag{1}$$

$$\frac{1}{z} = \cos x - i \sin x. \tag{2}$$

D'où :

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \tag{3}$$

ces relations impliquant (1) et (2).

b) La résolution de l'équation :

$$\cos x + 3 \sin x - 1{,}8 = 0$$

revient donc à résoudre le système (I) défini par :

$$(\text{I}) \begin{cases} |z| = 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - \dfrac{3}{2} i \left(z - \dfrac{1}{z}\right) - 1{,}8 = 0. \qquad z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

On a successivement :

$$z^2 + 1 - 3i(z^2 - 1) - 3{,}6z = 0,$$
$$z^2(1 - 3i) - 3{,}6z + 1 + 3i = 0.$$

L'expression relative à cette équation :

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

est égale à : $(1{,}8)^2 - (1 - 3i)(1 + 3i) = (1{,}8)^2 - 10,$

soit : $\Delta' = -6{,}76 = (2{,}6i)^2.$

D'où, en appelant z_1 et z_2 les racines :

$$z_1 = \frac{1{,}8 + 2{,}6i}{1 - 3i} = \frac{(1{,}8 + 2{,}6i)(1 + 3i)}{10}$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \implies |z_1| = 1;$$

$$z_2 = \frac{1{,}8 - 2{,}6i}{1 - 3i} = \frac{(1{,}8 + 2{,}6i)(1 + 3i)}{10}$$

$$= \frac{4{,}8}{5} + \frac{1{,}4i}{5} \implies |z_2| = 1.$$

Ces deux nombres donnent :

$$\cos x_1 = -0{,}6 \quad \text{et} \quad \sin x_1 = 0{,}8;$$
$$\cos x_2 = 0{,}96 \quad \text{et} \quad \sin x_2 = 0{,}28.$$

Les réels x_1 et x_2 s'obtiennent à l'aide des tables et définissent l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation proposée :

$$\mathcal{S} = \{x_1 + k_1 2\pi\} \cup \{x_2 + k_2 2\pi\},\ k_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

EXERCICE. ■ EXERCICE D'APPLICATION IMMÉDIATE.
En utilisant la méthode précédente, résoudre l'équation définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$\sqrt{2}\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0.$$

EXERCICES

4.34 Résoudre, sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations du premier degré suivantes définies respectivement par :

1° $2z + 3i = \frac{1}{2i}z + 3i - 5;$

2° $(2 + 3i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = (5 - 2i)z + 10;$

3° $(i + \sqrt{3})^2 z + \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{21i}{2 - i} - 15;$

4° $(5 + 3i)\bar{z} + \frac{2 - i}{1 + i} = (j + j^2)^2.$

4.35 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations suivantes définies respectivement par :

1° $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0;$
$z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0.$

2° $z^2 - 2(1 + i)z + i - 1 = 0;$
$z^2 - (3 + i)z + 14 - 2i = 0.$

3° $z^2 + 2i\sqrt{2}z - 2(1 + i) = 0;$
$2z^2 - (20 + 9i)z + 50 = 0.$

4° $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0;$
$z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0.$

5° $z^2 - 4(1 - i)z + 2(4 - i) = 0$;
$z^2 - 4(6 + i)z + 3(63 + 16i) = 0$.

6° $z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i) = 0$;
$z^2 - (10i - 7)z - (11 + 14i) = 0$.

4.36 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations suivantes définies respectivement par :

1° $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.

2° $iz^2 + 2iz + 2 + i = 0$.

3° $(1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0$.

4° $(1 - i)z^2 - 2z - 11 + 3i = 0$.

5° $(4 + 3i)z^2 - (2i - 4)z + 2 - i = 0$.

6° $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.

7° $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

4.37 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par : $z^2 - 2(1 + ia^2)z + 1 - a^4 = 0$.

4.38 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations suivantes définies par :

1° $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

2° $16z^2 - 40z + 69 = 0$.

Exprimer pour chaque racine le module et un argument. Construire les images des racines.

4.39 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par : $4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0$.

Mettre sous forme trigonométrique toutes les sommes de deux racines quelconques.

4.40 On considère, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$x^2 + 4x \cos u + 2 + 4 \cos 2u = 0,$$

où u est un réel compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

1° Pour quelles valeurs de u les deux racines sont-elles réelles ?

2° Déterminer le module et l'argument de chaque racine dans le cas $u = \frac{\pi}{6}$.

4.41 Résoudre l'équation définie par :

$$z^2 - 2z + 4 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Soit z' et z'' les racines obtenues $\left(z' \text{ a un argument compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer :

$$u = \frac{z'}{z''}, \qquad u^n, \qquad |u^n|, \qquad \operatorname{Arg} u^n.$$

Résoudre l'équation définie par :

$$Z^3 = u.$$

4.42 1° Le nombre t est un réel fixé. Exprimer, en fonction de $\frac{t}{2}$, le nombre δ :

$$\delta = \sin^2 t - 2(1 - \cos t).$$

Quels sont les nombres appartenant soit à $\mathbb{R}$, soit à $\mathbb{C}$, dont le carré est δ ?

2° Discuter et résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$2z^2(1 - \cos t) - 2z \sin t + 1 = 0.$$

Préciser, suivant les valeurs de $\sin \frac{t}{2}$, le module et l'argument de chaque solution.

4.43 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$z^2(5 - \cos t)^2 - 32z \cos t(5 - 3\cos t) + 256 = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4.44 Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les équations suivantes définies sur $\mathbb{C}$:

1° $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$; $\quad z^4 + 18z^2 + 1\,681 = 0$.

2° $3z^4 + 2z^2 + 1 = 0$; $\quad z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

3° $z^4 - 2az^2 + 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$; $\quad z^4 - 2z^2 \cos 2\alpha + 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.45 On considère, sur $\mathbb{C}$, le polynome $\mathbf{f}(z)$ tel que :

$$\mathbf{f}(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1 + i)z - 5.$$

Calculer : $\mathbf{f}(1)$, $\mathbf{f}(i)$. Déterminer les zéros du polynome $\mathbf{f}(z)$.

4.46 Résoudre l'équation suivante définie sur $\mathbb{C}$, sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = 0.$$

4.47 1° Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent exister entre les modules et les arguments des nombres complexes A et B pour que les deux racines de l'équation, définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$z^2 + Az + B = 0, \qquad (1)$$

aient même argument ? Que deviennent ces relations pour A réel ?

2° Démontrer que, pour les images respectives M_1 et M_2 des racines z_1 et z_2 de l'équation (1) soient :

a) alignées avec 0,

b) telles que $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 1$,

il faut et il suffit qu'il existe un réel θ ($\theta \in [0, \pi[$), et un réel t satisfaisant à certaine inégalité telle que l'on puisse écrire :

$$A = te^{i\theta}, \qquad B = e^{2i\theta}, \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

4.48 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations suivantes, définies par :

$8z^4 - 8z^3 + 27z - 27 = 0$ (indiquer module et argument);

$z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$;

$z^6 + z^3 - 2 = 0$.

4.49 Résoudre les équations suivantes définies sur $\mathbb{C}$ par :

$z^8 + z^4 + 1 = 0$;

$z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

Dans chaque cas, on en déduira une factorisation des polynomes :

$$\mathbf{f}(z) = z^8 + z^4 + 1, \qquad \mathbf{g}(z) = z^{10} + z^5 + 1,$$

en produit de polynomes du second degré à coefficients réels.

4.50 *a*) Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation suivante définie par :

$$z^4 + 2\lambda^2 z^2 (1 + \cos\theta)\cos\theta + \lambda^4 (1 + \cos\theta)^2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dans le cas où $\lambda = 1$, déterminer le module et l'argument de chacune des quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 de l'équation.

b) Calculer : $\Sigma_m = (z_1)^m + (z_2)^m + (z_3)^m + (z_4)^m,$

m étant un entier naturel, dans le cas où λ est un nombre complexe fixé.

4.51 Déterminer les coefficients réels λ et μ tels que le polynome $\mathbf{f}(x)$, défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\mathbf{f}(x) = \lambda(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 - (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + \mu(x^2 + 1)^4,$$

admet pour zéros les zéros du polynome $\mathbf{g}(x) = x^2 + x + 1$.

4.52 Sachant que $x + \frac{1}{x} = 2\cos a$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right).$$

4.53 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation suivante définie par :

$$x^4 - 2x^3(\cos\alpha + \sin\alpha) + 2x^2(1 + \sin 2\alpha) - 2x(\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 = 0.$$

$\left(\text{On posera } x + \frac{1}{x} = X;\ \alpha \text{ est un réel.}\right)$

4.54 Sachant qu'elles ont une racine commune, résoudre les équations suivantes, définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad \text{et} \quad z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + (2i - 1) = 0.$$

4.55 Résoudre les équations suivantes, définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$(z + 1)^3 + i(z - 1)^3 = 0;$$

$$(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0; \quad (z + i)^n - (z - i)^n = 0;$$

$$(1 - iz)^n + i(1 + iz)^n = 0, n = 2, n = 3, n = 4;$$

$$\left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n = 0.$$

4.56 Résoudre, sur $\mathbb{C}$, les équations définies par :

a) $\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^3 + \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^2 + \frac{z - i}{z + i} + 1 = 0.$

b) $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^4 = \frac{1 + ia}{1 - ia}, \qquad a \in \mathbb{R}.$

4.57 Soit A un nombre complexe, m un entier naturel non nul. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation, définie par :

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^m = A, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ait m racines réelles est que $|A| = 1$.

Cette condition étant réalisée, calculer les racines. Faire une figure

PROBLÈMES

4.58 Calculer les racines de l'équation définie par :

$$x \in \mathbb{C}, \qquad x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1 = 0.$$

a) Soit α l'une des racines. Calculer, pour tout entier m, la valeur de l'expression :

$$\alpha^m + \alpha^{-m}.$$

b) Soit $a = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ (on pourra utiliser $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$). Pour tout couple (p, q) d'entiers compris entre 1 et 8, on considère le nombre complexe :

$$A_{(p,q)} = a^{(p-1)(q-1)}.$$

Soit r et s deux entiers compris entre 1 et 8. Calculer l'expression $B_{(r,s)}$ telle que :

$$B_{(r,s)} = A_{(r,1)}A_{(s,1)} + A_{(r,2)}A_{(s,2)} + \cdots + A_{(r,8)}A_{(s,8)}.$$

4.59 On définit une suite illimitée dont les éléments sont : $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, en se fixant u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \tag{1}$$

On suppose que : $a^2 + 4b < 0$. Démontrer qu'il existe un réel r strictement positif et un réel θ $(0 < \theta < \pi)$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1} = 2r\cos\theta \times u_n - r^2 u_{n-1}. \tag{2}$$

On choisit : $\quad u_1 = x_1 \quad$ et $\quad u_2 = r(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)$.

En utilisant la relation (2), démontrer que :

$$u_3 = r^2(x_1\cos 2\theta - y_1\sin 2\theta),$$

et que : $\quad u_{n+1} = r^n(x_1\cos n\theta - y_1\sin n\theta)$.

4.60 1° On donne un réel θ. Démontrer que l'équation, définie par :

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0,$$

admet en général deux racines complexes conjuguées que l'on note z_1 et $\bar{z}_1$. Donner leurs expressions en fonction de θ. Quel est le module de z_1 ? Examiner le cas où θ est un multiple de π.

2° On appelle de même z_2 et $\bar{z}_2$ les racines de l'équation définie par :

$$z^2 - 2z\cos\theta' + 1 = 0,$$

où θ' désigne un réel donné.

Calculer, en fonction de $\cos\theta$ et $\cos\theta'$, les coefficients a, b, c et d pour que le polynome : $\quad P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$

soit identique au polynome :

$$Q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2).$$

Démontrer que l'on a, dans ces conditions, les relations :

$$\begin{cases} a = c, \\ d = 1. \end{cases} \tag{C}$$

3° Inversement, on se donne *a priori* les coefficients a, b, c et d, satisfaisant aux conditions (C) et l'on cherche à déterminer des réels θ et θ', tels que $Q(z)$ soit identique à $P(z)$.

Démontrer que $\cos\theta$ et $\cos\theta'$ sont racines de l'équation :

$$X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0.$$

Écrire les inégalités (C′) que doivent vérifier a et b pour qu'il existe des réels θ et θ' répondant à la question.

4° On se propose d'interpréter géométriquement les inégalités (C′). Pour cela, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le point M de coordonnées a et b.

Dans quelle région du plan faut-il choisir M pour que les relations (C′) soient satisfaites?

On tracera soigneusement les courbes qui délimitent cette région.

5° Appliquer les résultats précédents à la recherche des racines de l'équation définie par :

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0.$$

(On déterminera, au préalable, θ et θ'.)

4.61 1° Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$z^5 - 1 = 0. \qquad (1)$$

2° Vérifier l'identité :

$$\forall_{\mathbb{C}} z \qquad z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

3° Factoriser le polynome $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ en l'écrivant :

$$z^2\left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right],$$

et en introduisant le complexe $u = z + \frac{1}{z}\cdot$

4° Résoudre algébriquement l'équation (1).

5° Interpréter géométriquement le complexe u. En déduire les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis celles de $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{4\pi}{5}\cdot$

4.62 Dans un plan π, identifié à $\mathbb{C}$ et rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M_1 et M_2 sont les images des racines complexes z_1 et z_2 de l'équation du second degré (E) définie par :

$$z^2 - 2(a + ib)z + a + b + \frac{1}{8} = 0,$$

où a et b sont des paramètres réels et où i est le nombre complexe dont l'image a pour coordonnées $(0, +1)$.

A) 1° Quelle est la somme des arguments de z_1 et de z_2 ?

2° Quelles sont les bissectrices de l'angle de droites $(\widehat{OM_1, OM_2})$?

B) 1° Quelle est l'affixe du milieu de $[M_1M_2]$? Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et réelles? On vérifiera qu'il existe deux couples (a, b) répondant à cette question et l'on notera P et Q les images des racines doubles correspondantes.

2° Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et imaginaires pures? On vérifiera qu'il existe aussi deux couples (a, b) répondant à la question et l'on notera R et S les images des racines doubles correspondantes.

3° Vérifier que l'un quelconque des points P, Q, R et S est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

4° Former les équations des deux cercles admettant pour diamètres [P, Q] et [R, S]. Vérifier que ces deux cercles sont orthogonaux.

C) Étant donné deux nombres réels x et y, on appelle T le point d'affixe $t = x + iy$.

1° Calculer, en fonction de a, b, x et y, la partie réelle u et la partie imaginaire v du nombre complexe :

$$\omega = (t - z_1)(t - z_2),$$

où z_1 et z_2 sont toujours les racines de l'équation (E). Vérifier que u et v peuvent être mises sous la forme :

$$u = Aa + Bb + C \quad \text{et} \quad v = A'a + B'b + C',$$

où A, B, C, A', B' et C' sont des fonctions des variables x et y.

2° A chaque nombre complexe $t = x + iy$, on associe l'ensemble E_t constitué dans le plan par les points d'affixe ω obtenus lorsque a et b décrivent l'ensemble des réels.

Préciser, suivant la valeur de t, la nature de E_t en distinguant les cas où les vecteurs $\vec{\alpha}$ [de composantes scalaires (A, A')] et $\vec{\beta}$ [de composantes scalaires (B, B')] sont linéairement indépendants ou non. Dans le cas de la dépendance, démontrer que E_t contient O si et seulement si T est l'un des points O, T_1 et T_2, où T_1 et T_2 désignent les points communs aux cercles de diamètres [P, Q] et [R, S].

3° Déduire des résultats précédents que les bissectrices des angles de droites $(\widehat{T_1M_1, T_1M_2})$ et $(\widehat{T_2M_1, T_2M_2})$ sont indépendantes de a et de b. Quelles sont ces bissectrices?

(*Baccalauréat* C, *Strasbourg*, 1970)

4.63 On considère la relation :

$$6z^2 - 3z \sin\theta + \cos\theta = 0, \tag{1}$$

qui lie les deux nombres θ et z.

1° z étant un nombre réel donné, la relation (1) est alors une équation en θ. On cherche les valeurs réelles de θ, solutions de cette équation en fonction de z.

a) Calculer effectivement ces valeurs lorsque :

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Discuter, suivant les valeurs de z, l'existence des solutions de l'équation et le nombre des extrémités des arcs du cercle trigonométrique qui ont pour mesures ces solutions.

2° θ étant un nombre réel donné, la relation (1) est alors une équation en z; on cherche les valeurs réelles ou complexes de z, solutions de cette équation.

Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation (1) possède :

a) une racine double;

b) deux racines réelles et distinctes;

c) deux racines complexes.

Dans ce dernier cas, calculer le module des racines en fonction de θ et démontrer qu'il est compris entre deux nombres indépendants de θ.

3° Dans un plan, on donne un système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

a) Déterminer le transformé E du cercle C de centre O et de rayon 1 dans l'affinité orthogonale d'axe $x'x$ et de rapport $\frac{1}{2}$. Le point M appartenant à C, on pose $\mu(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Calculer, en fonction de θ, les coordonnées du point M′ transformé de M dans cette affinité.

b) On donne la parabole P qui a pour tangente au sommet $y'y$ et pour foyer le point F de Ox tel que $\overline{OF} = \frac{1}{6}$; H étant un point de $y'y$, on pose $\overline{OH} = z$. Déterminer, en fonction de z, l'équation de la tangente T à P, autre que $y'y$ si z est différent de 0, qui passe par H.

c) Démontrer que l'équation (1) est une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier θ et z pour que le point M′ appartienne à T.

Interpréter géométriquement les résultats des questions 1° et 2° (z réel).

En déduire les points communs et les tangentes communes à F et P.

4.64 1° Démontrer que le polynome :

$$Z^2 + 2(2 + i)Z + 3 + 4i.$$

où Z est un nombre complexe, est le carré d'un polynome du premier degré.

2° On considère, sur le corps des complexes, l'équation (E) en U :

$$U^2 - 2(Z + 4)U + 2Z^2 + 2(6 + i)Z + 19 + 4i = 0,$$

où Z est un paramètre appartenant lui-même à l'ensemble des complexes.

a) Déterminer Z pour que cette équation ait une racine double.

b) Déterminer les deux solutions de (E) dans le cas général (on pourra appeler U′ et U″ ces deux solutions).

c) Déterminer l'ensemble des Z tels que Z soit lui-même une des solutions de l'équation (E).

3° Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, à tout point de coordonnées (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $x + iy$ dont il est l'image.

Soit Z et U deux nombres complexes, M l'image de Z et P l'image de U. On dit que M et P vérifient la relation $\mathfrak{R}$ et l'on écrit $M\mathfrak{R}P$ si et seulement si U est une racine de l'équation (E) correspondant à la valeur Z du paramètre.

Démontrer que :

$$M\mathfrak{R}P \iff \begin{cases} P = \mathcal{S}'(M) \\ \quad \text{ou} \\ P = \mathcal{S}''(M), \end{cases}$$

$\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ étant des transformations ponctuelles planes, respectivement définies par :

$$U' = Z(1 + i) + 3 + 2i \quad \text{et} \quad U'' = Z(1 - i) + 5 - 2i,$$

que l'on caractérisera en s'aidant du 2°.

4° *a*) Pour un point M donné, on pose :

$$P' = \mathcal{S}'(M) \text{ et } P'' = \mathcal{S}''(M).$$

Quelle est la transformation ponctuelle fixe $\mathcal{S}$ permettant d'associer P' à P''? Caractériser $\mathcal{S}$ géométriquement.

b) Soit I le milieu de [P', P'']. On pose I = $\mathcal{T}$(M). Démontrer que $\mathcal{T}$ est une translation.

En déduire une construction simple de l'ensemble :

$$\{P \mid M \mathcal{R} P\}, \quad \text{le point M étant donné,}$$

puis de l'ensemble :

$$\{M \mid M \mathcal{R} P\}, \quad \text{le point P étant donné.}$$

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que M, P' et P'' soient alignés. Quel est alors l'ensemble des points P' et l'ensemble des points P''?

(*Baccalauréat* C, *Orléans*, 1970)

4.65 Soit l'équation définie par $z^2 - 2pz + 1 = 0$, dont les racines z' et z'' appartiennent au corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par A, B, P, M' et M'' les points du plan complexe $x'Ox$, $y'Oy$, d'affixes respectives $+1$, -1, p, z' et z''.

1° On suppose p réel.

a) Déterminer l'ensemble des points P pour lesquels z' et z'' sont deux racines réelles distinctes ou confondues.

b) Même question lorsque z' et z'' sont deux racines complexes.

2° On suppose, dans la suite du problème, que p est un nombre complexe non réel.

a) Démontrer, sans calculer z' et z'', que P est le milieu de [M', M''], que $\|\overrightarrow{OM'}\| . \|\overrightarrow{OM''}\| = \|\overrightarrow{OA}^2\| = \|\overrightarrow{OB}\|^2$ et que Ox est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}})$.

b) Calculer $(z' - p)^2$ et $(z'' - p)^2$ en fonction de p.

En déduire que :

$$\|\overrightarrow{PA}\| . \|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{PM'}\|^2 = \|\overrightarrow{PM''}\|^2,$$

et que la droite M'M'' est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}})$.

3° Le nombre complexe p est tel que :

$$p = \cos\varphi + i \sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

a) Comparer les modules et les arguments des racines z' et z''.

Calculer φ pour que z' et z'' soient : réelles; imaginaires pures.

b) Calculer le module et l'argument des nombres :

$$z' - p \quad \text{et} \quad z'' - p.$$

c) En supposant : $\cos\varphi < 0$, démontrer que $z' + i$ et $z'' + i$ ont le même module, que l'on déterminera. Démontrer ensuite que $z' - i$ et $z'' - i$ ont le même argument, que l'on déterminera.

4.66 On considère l'ensemble E des équations du 4e degré, définies sur $\mathbb{C}$, à coefficients réels, de la forme :

$$f(x) = x^4 - 2ax^2 + b = 0. \tag{1}$$

1° *a*) Démontrer que l'équation (1) a toujours quatre racines, réelles ou non, distinctes ou non.

b) Démontrer que, si l'équation (1) a une racine complexe x_0, non réelle et non imaginaire pure, elle admet aussi pour racine $\bar{x}_0$ et $-x_0$. On dit que l'équation est du type I. Quelle est dans ce cas, dans le plan complexe, la disposition des images des quatre racines?

c) Résoudre l'équation (1) si :

$$a = \rho^2 \cos 2\theta \quad \text{et} \quad b = \rho^4,$$

ρ et θ étant deux nombres réels tels que :

$$\rho > 0, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Mettre $f(x)$ sous forme de deux polynomes de la variable x à coefficients réels.

2° A chaque élément e de E, on fait correspondre le point M de coordonnées (a, b) d'un plan rapporté à un repère orthonormé. Le point M est l'image de e. Discuter, suivant la position du point M, si l'équation (1) est du type I précédent, ou si elle a quatre racines imaginaires pures (type II), ou si deux de ses racines et deux seulement sont imaginaires pures (type III), ou si elle a quatre racines réelles (type IV). Donner la disposition dans le plan complexe des images des quatre racines de (1) pour chacun des types II, III, IV.

3° L'équation (1) étant du type I, trouver l'ensemble des points M :

a) tels que le module d'une racine de (1) soit un nombre fixé ρ;

b) tels qu'un un argument d'une racine de (1) soit un réel fixé θ.

4° L'équation (1) étant du type III, trouver l'ensemble des points M :

a) tels que les côtés du polygone convexe ayant pour sommets les images des racines de (1) aient une longueur fixée l;

b) tels que le rayon de son cercle inscrit soit un nombre fixé r.

(*Baccalauréat, Groupe* I, 1968)

4.67 1° *a*) Démontrer que toute équation du 4e degré en X, à coefficients réels, dont on a rendu le coefficient de X^4 égal à 1 :

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{1}$$

peut être ramenée, par un changement d'inconnue de la forme $X = \alpha + x$, à une équation de la forme :

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2}$$

b) Démontrer que l'équation (2) peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme :

$$T^2 + T' = 0, \tag{3}$$

T et T′ étant deux polynomes du second degré en x, T étant nécessairement de la forme :

$$T = x^2 + \beta.$$

(On posera $T' = ux^2 + vx + w$ et l'on calculera u, v et w en fonction de a, b, c et β.)

c) Démontrer que le polynome T′ peut être mis sous la forme :

$$T' = u(x + \gamma)^2,$$

pourvu que β soit racine d'une équation du 3e degré définie par $\varphi(\beta) = 0$ que l'on formera.

En déduire que, si l'on peut trouver une racine de l'équation $\varphi(\beta) = 0$, on peut résoudre l'équation (1). [On rappelle que l'on peut factoriser, c'est-à-dire décomposer en un produit de facteurs, l'expression $M^2 + N^2$, en l'écrivant :

$$(M + iN)(M - iN).]$$

Cette méthode a été inventée par le mathématicien bolonais Ferrari (1522–1565) et ramène ainsi la résolution d'une équation du 4e degré à celle d'une équation du 3e degré.

2° Appliquer ce qui précède à l'équation définie par :

$$\mathbf{f}(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0. \tag{4}$$

Calculer, dans ce cas particulier, les racines de l'équation définie par $\varphi(\beta) = 0$ (l'une des racines est 1).

En déduire trois factorisations du polynome $\mathbf{f}(x)$ en un produit de deux trinomes à coefficients réels ou complexes, et la résolution de l'équation (4).

Représenter les images des racines dans le plan complexe. Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

3° Résoudre l'équation définie par :

$$F(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8 = 0. \tag{5}$$

Quels sont les modules et les arguments des racines ? Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

Factoriser $F(X)$ sur le corps des réels.

(*Baccalauréat* C, *Paris*, 1970)

4.68 On considère l'ensemble E des équations du 4e degré, à coefficients réels, de la forme :

$$\mathbf{f}(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0. \tag{1}$$

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1° Après avoir divisé $\mathbf{f}(x)$ par x^2, poser $x + \frac{1}{x} = u$ et démontrer que la nouvelle inconnue u est racine de l'équation définie par :

$$u^2 + 2au + b - 2 = 0. \tag{2}$$

En déduire que l'équation (1) a toujours quatre racines, réelles ou non, distinctes ou non.

2° *a*) En revenant à la forme initiale : $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$, démontrer que si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, x_0, elle a aussi pour racine le nombre conjugué de x_0 et le nombre inverse de x_0.

b) En déduire qu'alors, si le module de x_0 est différent de 1, l'équation (1) a quatre racines complexes dont on précisera la disposition des images dans le plan complexe. Une telle équation (1) est dite du type I.

c) Déterminer a et b sachant que l'équation (1) admet pour racine le nombre $2 + i$. Résoudre dans ce cas l'équation (1) et mettre $\mathbf{f}(x)$ sous forme d'un produit de deux polynomes de la variable x à coefficients réels.

d) Même question qu'au § *c*), en supposant maintenant que l'équation (1) admet pour racine le nombre $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, ρ et θ étant deux réels tels que :

$$0 < \rho < 1, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

3° *a*) Démontrer que si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, de module 1, elle a ou bien trois autres racines de module 1 (type II) ou bien deux autres racines réelles et inverses (type III).

b) Démontrer que l'équation (1) peut avoir quatre racines réelles (type IV).

c) Représenter, dans le plan complexe, les images des quatre racines de l'équation (1) pour chacun des types II, III et IV.

4° *a*) A chaque élément e de E, on associe le point M de coordonnées (a, b) dans un plan rapporté à un repère orthonormé. M est appelé l'image de e. Discuter, suivant la position de M, le type de l'équation e.

b) L'équation (1) étant du type I, trouver l'ensemble des points M tels qu'une racine de l'équation e associée ait un module donné ρ $(\rho < 1)$.

c) L'équation (1) étant du type III, les images dans le plan complexe de ses quatre racines peuvent-elles être cocycliques?

4.69 A) 1° Déterminer les racines cubiques de i et leurs images dans le plan complexe.

2° Soit u un nombre complexe; u_1 étant une des racines cubiques de u, comment peut-on obtenir les deux autres racines u_2 et u_3?

3° Soit deux nombres complexes u et v et leurs racines cubiques respectives. Comment les associer pour que le produit uv de deux d'entre elles soit le même?

B) On considère, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$u^3 + 2u - 4i = 0. \qquad (1)$$

On pose $z = u + v$. Démontrer que l'équation (1) est satisfaite en prenant u et v tels que u^3 et v^3 soient les racines de l'équation sur $\mathbb{C}$, définie par :

$$v^2 - 4iv - \frac{8}{27} = 0. \qquad (2)$$

Résoudre l'équation (2) et en déduire les racines de l'équation (1).

NOTA. — On calculera d'abord : $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ et $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$.

4.70 On considère l'expression (E) : $(x + jy + j^2z)^3$,
dans laquelle x, y, z sont des nombres complexes et j, j^2 les racines cubiques de l'unité.

1° Les nombres x, y, z étant fixés, démontrer que, lorsqu'on permute de toutes les manières possibles x, y, z, l'expression (E) ne prend que deux valeurs distinctes A et B. A quelles conditions doivent satisfaire x, y, z pour que l'on ait $A = B$?

2° Soit x_1, x_2, x_3 les racines de l'équation (1) :

$$x^3 + px + q = 0,$$

où p et q sont réels.

a) Donner en fonction de p et q les expressions de :

$$s_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i, \qquad s_2 = \sum x_i x_j, \qquad s_3 = x_1 x_2 x_3,$$

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2, \qquad \mathcal{S}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^3, \qquad \mathcal{S}_{2,1} = \sum x_i^2 x_j.$$

(i et j appartiennent à $C = \{1, 2, 3\}$.)

b) En supposant que x, y, z sont les racines de l'équation (1), former l'équation admettant A et B pour racines. En déduire les formules permettant de calculer les racines de l'équation (1).

3° Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$x^3 + 3x + 2 = 0.$$

4.71 Soit, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$z^4\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) - 4z^2 \cos\theta + 4iz \sin 2\theta + 8 \sin^2\theta = 0,$$

où θ est un réel fixé.

1° Démontrer que cette équation a une racine de la forme $\lambda(1 + i)$ et une racine de la forme $\lambda(-1 + i)$, λ étant un nombre réel que l'on déterminera.

En déduire les racines de l'équation.

2° Quels sont, dans le plan complexe, lorsque θ varie, les ensembles respectifs des images des quatre racines ?

4.72 Le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$.

1° Démontrer que, si $|z| = 1$, le nombre $Z = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ est imaginaire pur.

2° Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^m + \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^m = 2 \cos\alpha, \qquad m \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \qquad (1)$$

3° Soit A, P, Q les points d'affixes respectives :

$$z = 1, \quad p = \cos\alpha + i \sin\alpha, \quad q = \cos\alpha - i \sin\alpha.$$

Quels sont les points M, images des racines $m^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes p et q ?

Démontrer que les racines de l'équation (1) sont représentées par les points de rencontre des droites AM avec l'axe Oy du repère.

Discuter le nombre des racines de l'équation (1).

(*Arts et Métiers*, 1962)

4.73 A) 1° Représenter, dans le plan complexe, les images des racines de l'équation définie par :

$$z^5 - 1 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

2° Démontrer que les racines du polynome $z^5 - 1$ dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes sont les puissances d'un même nombre ε.

En déduire que ces racines forment un sous-groupe du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ isomorphe au groupe additif des entiers modulo 5, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

3° Décomposer le polynome $z^5 - 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur le corps $\mathbb{R}$ des réels.

B) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ engendré par les racines de l'équation définie par $z^5 - 1 = 0$.

1° Démontrer que, pour tout entier naturel n, ε^n est élément de E.

2° Démontrer que $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ est une base de E.

3° Démontrer que E est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

*C) Soit $P(z)$ un polynome non nul à une indéterminée sur $\mathbb{Q}$ de degré au plus égal à 3.

1° Démontrer que les polynomes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $P(z)$ et $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ ni ont pas de facteur commun.

2° Démontrer que $P(\varepsilon)$ est inversible dans E.

3° Démontrer que E est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

4.74 On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
Pour λ réel, on définit l'application $f\lambda$, de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par :

$$z \longmapsto Z = f\lambda(z) = (1 + \lambda i)z - \lambda i.$$

1° La fonction $f\lambda$ est-elle bijective ?

2° Soit M l'image de Z et m celle de z dans le plan complexe. Chaque application $f\lambda$ définit une transformation ponctuelle plane T_λ et l'on note $M = T_\lambda(m)$.

a) Démontrer qu'il existe un élément unique de $\mathbb{C}$, z_0, tel que, pour tout λ réel, $f\lambda(z_0) = z_0$. Soit m_0 l'image de cet élément.

b) Calculer $\dfrac{Z - z}{z - z_0}$ et en déduire le produit scalaire $\overrightarrow{m_0 m} \cdot \overrightarrow{mM}$.

3° *a*) Pour m fixé et λ variable, déterminer l'ensemble des points M tels que $M = T_\lambda(m)$.

b) Pour M fixé et λ variable, déterminer l'ensemble des points m tels que :

$$M = T_\lambda(m).$$

c) Soit O, F, F', A et A' les points de l'axe réel d'abscisses respectives 0, +1, −1, a, $-a$, où a est strictement positif et différent de 1.
Pour λ variable, déterminer :

l'ensemble des points Ω, tels que $\Omega = T_\lambda(0)$;
l'ensemble des points K, tels que $K = T_\lambda(A)$;
l'ensemble des points K', tels que $K' = T_\lambda(A')$.

4.75 Soit, dans le plan complexe, deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

où x_1, y_1, x_2 et y_2 sont réels.

1° On suppose les affixes z_1 et z_2 liées par la relation :

$$z_1 z_2 = i.$$

a) Quelle relation lie les modules ρ_1 et ρ_2 de z_1 et de z_2 ?
Quelle relation lie les arguments θ_1 et θ_2 tels que :

$$\theta_1 \in \arg z_1 \quad \text{et} \quad \theta_2 \in \arg z_2 \,?$$

b) Démontrer les relations :

$$x_2 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

c) Déterminer z_1 et z_2 lorsque $z_1 = z_2$.

2° Les nombres complexes z_1 et z_2 étant liés par la relation $z_1 z_2 = i$, on désigne par T la transformation qui associe au point M_1 le point $M_2 = T(M_1)$.

a) La transformation T est-elle définie pour tous les points du plan ? Est-elle involutive ? Quels sont ses points doubles ?

b) En utilisant les résultats de la question 1° *b*), déterminer la courbe transformée par **T** de la droite D d'équation $x = \frac{1}{4}\cdot$ Préciser la nature et la position de cette courbe.

c) En utilisant les résultats de la question 1° *a*), indiquer une construction du point M_2, le point M_1 étant fixé.

3° On considère l'ensemble Γ des points M, privé du point O, dont les coordonnées x et y vérifient la relation : $(\mathcal{R}) \quad x^4 - x^2y^2 - y^2 = 0.$

a) On pose : $x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi).$

Démontrer que, pour tout M élément de Γ, distinct de O, on a : $\rho^2 = \operatorname{tg}^2 \theta.$

En déduire que Γ est globalement invariant par **T**.

b) Écrire la relation $\mathcal{R}$ sous la forme $y^2 = \mathrm{f}(x)$ et étudier la fonction g définie par $\mathrm{g}(x) = \sqrt{\mathrm{f}(x)}$. Représenter graphiquement l'ensemble Γ.

(*Baccalauréat* C, *Poitiers*, 1970)

4.76 Le plan affine euclidien π est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ et identifié au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On désigne par A, B, P, Q les images respectives des nombres complexes -1, $+1$, $+\frac{1}{2}\cdot$ $+2$ et par m le point d'affixe z. Soit C le cercle de diamètre [A, B].

A tout point m de $\pi - \{Q\}$, on associe le point M d'affixe Z; Z est défini par :

$$Z = \frac{z(2z - 1)}{z - 2}\cdot$$

On pose : $\qquad z = x + iy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

Soit **T** l'application qui, à m, associe M.

1° Le point m est élément du segment [A, B]. En étudiant sur l'intervalle [−1, +1] la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(2x - 1)x}{2 - x},$$

déterminer l'ensemble transformé du segment [A, B] par **T**.

2° Démontrer que Z peut s'écrire sous la forme :

$$Z = az + b + \frac{c}{z - 2},$$

a, b et c étant réels.

On pose : $\qquad Z = X + iY, \qquad$ X et Y étant réels.

Calculer X et Y en fonction de x et y et en déduire l'ensemble des points m tels que M soit élément de l'axe $x'x$ des réels.

3° On pose :

$$Z_1 = \frac{2z - 1}{2 - z}\cdot$$

Démontrer que : $\quad |Z_1| = 2\frac{\|\overrightarrow{mP}\|}{\|\overrightarrow{mQ}\|} \quad$ et $\quad \arg Z_1 = \mu(\widehat{\overrightarrow{mQ}, \overrightarrow{Pm}}).$

[Un argument de Z_1 est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{mQ}, \overrightarrow{Pm}})$.]

4° Démontrer que, si m est intérieur à C, c'est-à-dire si $|z| < 1$, alors $|Z_1| < 1$, puisque, si m est extérieur à C, alors M est extérieur à C.

5° On suppose que m appartient au demi-cercle C′ de diamètre [A, B], qui contient l'image de i. On désigne par θ l'argument de z tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et par φ un argument de Z_1.

Démontrer que : $\sin \varphi \geqslant 0$.

On suppose : $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Calculer $\cos \varphi$ en fonction de $\cos \theta$ et en déduire que φ est une fonction croissante de θ.

(*Baccalauréat* C, *Besançon*, 1969)

4.77 Soit $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ deux nombres complexes liés par la relation :

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $ad - bc \neq 0$.

La relation (1) définit une application de P vers P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ de support Ox, $\vec{j}$ de support Oy), faisant correspondre au point m d'affixe z (c'est-à-dire dont les coordonnées cartésiennes dans le plan P sont les nombres réels x et y) le point M d'affixe Z.

1° Cette application conserve la droite $x'x$ (c'est-à-dire transforme tout point de $x'x$ en un point de $x'x$). Dire pourquoi.

On considère, sur la droite $y'y$, un point quelconque m d'affixe $z = iy$. Calculer l'affixe $Z = X + iY$ du point M correspondant. Comment faut-il choisir les nombres réels a, b, c et d pour que la relation (1) conserve non seulement la droite $x'x$ mais aussi la droite $y'y$? On trouvera qu'il existe deux applications répondant à la question :

$$\left(Z = kz \quad \text{et} \quad Z = \frac{k}{z}, \qquad k \text{ réel}\right).$$

2° On considère celle, T, des deux applications précédentes (autre que l'identité) admettant le point $A(+1, 0)$ pour point double. Démontrer qu'elle est involutive et qu'elle admet le deuxième point double $B(-1, 0)$. Démontrer que deux points correspondants quelconques m et M et les points A et B sont situés sur un même cercle, C, que la droite $x'x$ bissecte l'angle $(\widehat{\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}})$ et que le point où la droite mM coupe la droite $y'y$ est le pôle de $x'x$ par rapport à C.

3° A tout point m du plan P autre que A ou B, l'application T attache la droite D joignant m à son transformé M.

Réciproquement, toute droite D du plan P provient-elle d'un point m? Préciser l'ensemble des droites D pour lesquelles il en est ainsi. Indiquer une construction géométrique du couple de points transformés (m, M) situés sur une droite D donnée. Ensemble des points M lorsque m décrit une droite Δ passant par O.

Ensemble des milieux du segment $[m, M]$ dans la même hypothèse.

4° On suppose que m décrit un cercle C, de centre O et de rayon donné r, et l'on pose :

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = \varphi.$$

Former, relativement aux demi-droites Ox, Oy, l'équation de la droite D attachée à m et celle de l'ensemble des points N se projetant orthogonalement sur Ox et Oy aux points où ils sont coupés par D.

4.78 Dans le plan complexe, on considère l'application T qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M', d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{h^2 - z^2}{2z},$$

où h est un nombre complexe fixé non nul. On note $M' = T(M)$.

1° Étudier l'ensemble des points invariants par l'application T et construire ces points.

2° M' étant un point donné du plan, démontrer que l'ensemble des points M tels que $T(M) = M'$ contient en général deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Calculer : $z_1 \times z_2$.

Démontrer que l'ensemble des points M' tels que M_1 et M_2 sont confondus contient deux points A'_1 et A'_2. Quels sont les points A_1 et A_2 d'affixes respectives a_1 et a_2, tels que :

$$A'_1 = T(A_1) \quad \text{et} \quad A'_2 = T(A_2)?$$

3° On pose : $$u = \frac{z - a_1}{z - a_2} \quad \text{et} \quad u' = \frac{z' - a'_1}{z' - a'_2},$$

où a'_1 et a'_2 sont les affixes respectives de A'_1 et A'_2.

Calculer u' en fonction de u.

4° Étudier l'ensemble des points M' dans chacun des cas suivants :

a) M décrit la médiatrice du segment $[A_1, A_2]$;

b) M décrit la droite A_1A_2;

c) M décrit un cercle contenant A_1 et A_2.

4.79 Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère l'application de $\mathbb{C} - \{i\}$ vers $\mathbb{C}$, définie par :

$$f(z) = \frac{iz + 2}{z - i}.$$

Dans le plan P représentant $\mathbb{C}$, le point M a pour affixe z; soit M' le point d'affixe $f(z)$. On associe ainsi à f une application de P vers P, notée F, telle que :

$$M' = F(M).$$

Elle est définie sauf lorsque M est le point I d'affixe i.

On repérera un point, soit par son affixe, soit par ses coordonnées dans le repère orthonormé du plan.

1° *a*) Déterminer les points invariants, A et B, de la transformation F.

b) Démontrer que f est involutive, c'est-à-dire que :

$$M = F(M').$$

c) Démontrer que, si $z = iy$, avec y appartenant à $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(z)$ s'exprime par $f(z) = iY$, où Y est réel.

Démontrer que, si $z = x + i$, avec x appartenant à $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(z)$ s'exprime par $f(z) = X + i$, où X est réel.

En déduire qu'il existe deux droites dont chacune est globalement invariante (on excepte toujours le point I) dans l'application F.

2° *a*) **Démontrer que, pour tout z différent de i :**

$$|\mathrm{f}(z) - i|.|z - i| = 1.$$

(La notation $|z|$ signifie « module de z ».)
Quel est le transformé par F d'un cercle de centre I et de rayon R ?
b) **Démontrer que le transformé par F d'un point dont l'affixe est réelle appartient au cercle ayant pour centre le point ω d'affixe $\frac{3i}{2}$ et pour rayon $\frac{1}{2}$.**

3° **On considère l'application g de ℂ vers ℂ, définie par :**

$$\mathrm{g}(z) = z - i.$$

Soit G la transformation ponctuelle associée. Démontrer que g est bijective.
On désigne par g^{-1} l'application réciproque de g. Déterminer g^{-1}.
Déterminer l'application h telle que l'application f définie au début du problème s'écrive :

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{g}.$$

(*Baccalauréat. Partiel*)

4.80 **Une application notée F fait correspondre, à tout point m d'affixe z du plan, le point M d'affixe Z, tel que :**

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{z - 1}{z + 1}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

α étant un réel fixé.

1° **Préciser l'application T pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$.**

2° **On considère l'application obtenue en composant deux applications T, correspondant à deux valeurs α′ et α″ de α. Démontrer que l'on a :**

$$\mathbf{T}_{\alpha'} \circ \mathbf{T}_{\alpha''} = \mathbf{T}_{\alpha''} \circ \mathbf{T}_{\alpha'} = \mathbf{T}_{\alpha'+\alpha''}.$$

3° **On suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Calculer les coordonnées (X, Y) de M, en fonction des coordonnées (x, y) de m, et inversement. Déterminer l'ensemble des points M lorsque :**

a) **m décrit le cercle de centre O et de rayon 1;**
b) **m décrit un cercle fixe contenant les points de $x'Ox$ d'abscisses -1 et $+1$;**
c) **m décrit un cercle fixe contenant les points de $y'Oy$ d'abscisses -1 et $+1$.**

4.81 **On désigne par A et B les points de l'axe $x'Ox$ d'abscisses respectives $+1$ et -1, par M l'image du nombre complexe Z, par m l'image du nombre complexe z, et l'on suppose que :**

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1° **Démontrer que la droite Mm est une bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, et que l'on a :**

$$Mm^2 = MA.MB.$$

2° **Soit $Z = X + iY$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$. Calculer X et Y, en fonction de r et θ. En déduire l'ensemble des points M lorsque m décrit un cercle de centre O, et lorsque m décrit une droite contenant O.**

3° Démontrer que l'on a :

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2,$$

et en déduire les relations :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{mA}, \overrightarrow{mB}}),$$

$$\frac{MA}{MB} = \left(\frac{mA}{mB}\right)^2.$$

Ensemble des points M lorsque m décrit un cercle contenant A et B.

4.82 Soit A et B deux points d'abscisses $+1$ et -1 sur Ox. Soit $m(z)$ et $M(Z)$ tels que :

$$z^2 + Z^2 = 1.$$

1° Démontrer que Om est, en direction, la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}})$ et que :

$$Om^2 = MA.MB.$$

(Écrire : $z^2 = (1 - Z)(1 + Z)$.)
OM joue le même rôle pour le triangle $\{A, m, B\}$.
2° On sait :

$$z' = iz \quad \text{et} \quad Z' = iZ, \qquad u = z + iZ,$$

$$v = z - iZ, \qquad u' = Z + iz, \qquad v' = Z - iz.$$

Calculer :

$$\frac{u}{v'} \quad \text{et} \quad \frac{v}{u'}.$$

Soit m', M', C, D, C', D' les images respectives de z', Z', u, v, u', v'.
Démontrer que OC et OD' sont perpendiculaires ainsi que OD et OC'.
3° Démontrer que :

$$MA + MB = mA + mB = OC + OD.$$

4.83 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère la fonction f qui, au nombre z, associe le nombre Z tel que :

$$f(z) = Z = \frac{z^2}{2z - 1}.$$

1° Quel est le domaine de définition de f? Sur ce domaine, la fonction f est-elle une bijection?
2° Soit φ la fonction qui, au nombre complexe z, fait correspondre le nombre $Z' = \frac{Z}{z - 1}$, et soit φ_1 la fonction définie par :

$$z' \longmapsto Z' = z'^2.$$

Démontrer que φ est une involution et que f est la transmuée de φ_1 par φ :

$$f = \varphi \circ \varphi_1 \circ \varphi.$$

(Calculer $\varphi_1 \circ \varphi$.)

4.84 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point M de coordonnées (x, y), image du nombre complexe $z = x + iy$. On dit aussi que z est l'affixe de M.

α étant un nombre réel donné, soit le produit : $z' = (z + 1 + i)(\alpha z - i)$.

On désigne par M' l'image de z'.

1° On donne $\alpha = 0$. Démontrer que M' est le transformé de M dans une application que l'on précisera.

2° On donne maintenant α différent de 0.

a) Déterminer les points M tels que $z' = 0$.

b) Mettre z', dans le cas général, sous la forme $A + iB$, A et B étant réels.

3° On se borne désormais au cas $\alpha = 1$; M' est le transformé de M dans une application T.

a) Quelle est l'équation de l'ensemble H_1 des points M tels que z' soit imaginaire pur ?

Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on déterminera le centre de symétrie et les asymptotes, et que l'on construira.

b) Quelle est l'équation de l'ensemble H_2 des points M tels que z' soit réel ?

Mettre l'équation trouvée sous la forme $y = f(x)$ et construire H_2.

Démontrer que les points d'intersection de H_1 et de H_2 sont connus *a priori*.

c) Quelle équation vérifient les affixes des points invariants dans T ? Déterminer ces affixes sous forme trigonométrique.

(*Baccalauréat* D, *Paris*, 1969)

4.85 Soit z un nombre complexe d'image m dans le plan complexe. A z, la relation :

$$Z^2 - 2zZ + 2z^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

fait correspondre deux nombres complexes Z_1 et Z_2, racines de cette équation en Z. On désigne par M_1 et M_2 les images respectives de Z_1 et Z_2 et par A et A' les points d'affixes 1 et -1.

1° Démontrer que :

a) m est le milieu du segment $[M_1, M_2]$;

b) $\|\overrightarrow{mM_1}\|^2 = \|\overrightarrow{mM_2}\|^2 = \|\overrightarrow{mA}\| . \|\overrightarrow{mA'}\|$;

c) la droite définie par M_1 et M_2 est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{mA}, \overrightarrow{mA'}})$ ($Z_1 \neq Z_2$ et $z \neq 1$ et $z \neq -1$).

2° Établir les relations :

$$\|\overrightarrow{M_1A}\| . \|\overrightarrow{M_1A'}\| = \|\overrightarrow{M_2A}\| . \|\overrightarrow{M_2A'}\| = \|\overrightarrow{Om}\| . \|\overrightarrow{M_1M_2}\|.$$

3° Démontrer que les bissectrices des angles $(\widehat{\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1A'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2A'}})$ sont perpendiculaires et comparer ces bissectrices à celles de l'angle $(\widehat{M_1M_2, Om})$.

4° L'équation (1) fait aussi correspondre à tout nombre complexe Z, d'image M, deux nombres complexes z_1 et z_2 d'images respectives m_1 et m_2, racines de l'équation (1) en z.

a) Comment sont disposés les points O, M, m_1 et m_2 ?

b) Comparer les bissectrices des angles $(\widehat{\overrightarrow{Mm_1}, \overrightarrow{Mm_2}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}})$.

5° Déterminer l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque :
a) *m* appartient à l'axe des réels (*z* est un réel).
b) *m* appartient à l'axe des imaginaires purs (*z* est imaginaire pur).
c) *m* décrit une ellipse E de foyers A et A'.

4.86 Par rapport à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$, une conique E a pour équation :

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

où *a* désigne un nombre réel fixé, strictement positif.

1° Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, de ses sommets. Écrire les équations de ses directrices D et D' (on désignera par D celle qui rencontre l'axe focal en un point d'abscisse positive). Calculer son excentricité *e*.

Soit M un point quelconque de E. Calculer, en fonction de *a* et de l'abscisse *x* de M l'expression rationnelle de $\|\overrightarrow{OM}\|$. On pose $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$ et soit θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. Calculer ρ en fonction de *a* et de θ.

2° A chaque point M de E, de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe de M.

Écrire l'expression trigonométrique de *z* (on désignera par θ un argument et l'on exprimera le module de *z* en fonction de *a* et de θ).

Soit z' et z'' les affixes des deux points M' et M'' de E, d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' - z''$ et en déduire la longueur du segment [M', M''].

b) On considère, dans le plan, le point P dont l'affixe Z est définie par la relation :

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Écrire l'expression trigonométrique de Z. En déduire l'ensemble des points P quand α varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P', M', M'' ?

4.87 Par rapport à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ une conique γ a pour équation :

$$15x^2 - 10y^2 - 30ax + 9a^2 = 0,$$

où *a* désigne un nombre réel fixé strictement positif.

1° Quelle est la nature de la conique γ ? Calculer les coordonnées de son centre, de ses sommets. Déterminer, s'il y a lieu, les équations des asymptotes. Calculer son excentricité *e*.

Soit M un point quelconque de γ, de coordonnées (x, y). Calculer, en fonction de *a* et de *x*, l'expression rationnelle de $\|\overrightarrow{OM}\|$ (on distinguera deux cas).

On pose $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$ et soit θ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}})$. Calculer ρ en fonction de *a* et de θ.

2° Soit α un nombre réel et D_α la droite contenant O et le point d'affixe $u_\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Lorsque D_α n'est pas parallèle à une asymptote de γ, on note M' et M'' les points d'intersection de D_α et de γ et z' et z'' les affixes de ces points.

a) Calculer z' et z'' en fonction de α.

b) On considère le point P, d'affixe Z définie par :

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Donner l'expression trigonométrique de Z. Quel est l'ensemble des points P quand α varie ? Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M' et M'' ?

4.88 On donne deux nombres complexes non nuls a et s et l'on considère la suite Σ des nombres complexes $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ définie par $z_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = sz_n + a, \quad \text{pour tout } n \text{ entier naturel.} \qquad (1)$$

a) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 en fonction de a et de s. Exprimer simplement z_n en fonction de a, de s et de n, lorsque : $s \neq 1$. Que peut-on dire de Σ lorsque $s = -1$? Donner la valeur de z_n lorsque $s = 1$.
b) Deux éléments distincts de Σ peuvent-ils être égaux ? Démontrer alors que Σ est périodique.
c) Vérifier que deux termes consécutifs de Σ ne sont jamais égaux et démontrer que :

$$\frac{Z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

d) Inversement, soit une suite donnée vérifiant les trois conditions suivantes :

deux termes consécutifs ne sont jamais égaux ;
la relation (2) est satisfaite ;
les deux premiers termes sont 0 et a.

Démontrer qu'une telle suite est confondue avec Σ.

(*Baccalauréat* C. *Paris*, 1971. *Partiel*)

4.89 On désigne :
a) par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes ;
b) par ρ et ρ^* les racines dans $\mathbb{C}$, supposées non rationnelles ($\rho \notin \mathbb{Q}$), de l'équation :

$$z^2 - pz + q = 0, \qquad (1)$$

où p et q sont deux éléments donnés de $\mathbb{Z}$;
c) par Ω le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé par les nombres $\omega = x + \rho y$ obtenus lorsque x et y sont des entiers relatifs [$(x, y) \in \mathbb{Z}^2$].

A) 1° *a*) Démontrer l'équivalence :

$$x \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{Z} \qquad x + \rho y = 0 \iff x = y = 0.$$

b) Démontrer que la somme et le produit sur $\mathbb{C}$ de deux éléments de Ω sont des éléments de Ω et que les opérations internes ainsi définies donnent à Ω une structure d'anneau commutatif. (Les démonstrations seront aussi succinctes que possibles.)

2° Pour tout élément $\omega = x + \rho y$, on pose :

$$\omega^* = x + \rho^* y.$$

Démontrer que ω^* est élément de Ω.

3° Pour tout élément ω de Ω, on définit :

$$N(\omega) = \omega\omega^* = \mathbf{f}(x, y).$$

a) Démontrer que $\mathbf{f}(x, y) = x^2 + pxy + qy^2$.
Constater que $N(\omega)$ est un entier relatif.
b) Démontrer que, pour tout couple (ω_1, ω_2) d'éléments de Ω, on a :

$$(\omega_1\omega_2)^* = \omega_1^*\omega_2^*.$$

En déduire que : $N(\omega_1\omega_2) = N(\omega_1)N(\omega_2)$.
c) Démontrer que : $N(\omega) = 0 \iff \omega = 0$.
4° Soit ω un élément de Ω. Démontrer que le nombre complexe ω^{-1} est élément de Ω si et seulement si $N(\omega)$ est égal à 1 ou à -1.
Démontrer que, muni de la loi de multiplication de $\mathbb{C}$, le sous-ensemble Ω' des éléments ω de Ω tels que $N(\omega) = 1$ est un groupe commutatif.
B) Soit *a*, *b*, *c* et *d* des entiers relatifs. Soit l'application $\mathbf{T}$ de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{Z}^2$ définie par $\mathbf{T}(x, y) = (X, Y)$, avec $X = ax + by$ et $Y = cx + dy$.
On se propose de rechercher *a*, *b*, *c* et *d* de façon que l'application T correspondante vérifie la condition :

$$\forall (x, y) \quad \text{on a} \quad N(X + \rho Y) = N(x + \rho y). \qquad (2)$$

a) Calculer $N(X + \rho Y)$ en fonction de *x*, *y*, *a*, *b*, *c*, *d*, *p* et *q*.
On considère les nombres α, α^*, β et β^* définis par :

$$\alpha = a + \rho c, \qquad \beta = b + \rho d.$$
$$\alpha^* = a + \rho^* c \quad \text{et} \quad \beta^* = b + \rho^* d.$$

Démontrer que : $N(X + \rho X) = \alpha\alpha^* x^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)xy + \beta\beta^* y^2$.

b) Trouver entre α, β, α^*, β^*, *p* et *q* un ensemble de relations nécessaire et suffisant pour que la condition (2) soit réalisée.
Vérifier qu'alors $\alpha^*\beta$ et $\alpha\beta^*$ sont les solutions de l'équation (1).
c) Dans le cas où la condition (2) est vérifiée et où $\alpha\beta^* = \rho$, calculer *b* et *d* en fonction de *a*, *c*, *p* et *q* sous forme de polynomes du premier degré par rapport à chacune des variables qu'ils contiennent.
Quelle est la valeur de $\mathbf{f}(b, d)$?

4.90 On définit, sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, une loi de composition interne notée « $*$ » en posant :

$$z * z' = z \, . \, \bar{z}'.$$

1° Démontrer que :

$$|z * z'| = |z \, . \, z'|.$$

2° La loi $*$ est-elle commutative? Est-elle associative? Admet-elle un élément neutre? Est-elle distributive par rapport à l'addition de deux nombres complexes?
3° Le nombre $z = a + ib$ étant fixé, déterminer $z' = x + iy$ (x et y réels) tel que :

$$z * z' = 1.$$

Démontrer que z' peut s'exprimer en fonction de z et $|z|$. A-t-on alors $z' * z = 1$?
4° Déterminer le nombre complexe $z = x + iy$ tel que :

$$(z * z) * z = i.$$

4.91 Soit deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

On convient de dire que z_1 précède z_2, et l'on note $z_1 \succ z_2$ si :

$$x_1 < x_2 \quad \text{ou si} \quad x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 < y_2.$$

1° Démontrer que :

$$(z_1 \succ z_2 \quad \text{et} \quad z_2 \succ z_3) \implies (z_1 \succ z_3).$$

2° La relation $z_1 \succ z_2$ entraîne-t-elle :

a) pour tout nombre complexe u :

$$z_1 + u \succ z_2 + u\,?$$

b) pour tout réel a :

$$z_1 a \succ z_2 a\,?$$

3° Si : $z_1 \succ z_2$ et $0 \succ k$ $(k \in \mathbb{C})$, a-t-on :

$$kz_1 \succ kz_2\,?$$

4.92 On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On considère la fonction $\mathbf{h}$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \longmapsto \mathbf{h}(z) = Z, \qquad Z = \frac{(1 - i\sqrt{2})z + 1}{z - (1 + i\sqrt{2})}.$$

1° Préciser sur quel ensemble la fonction $\mathbf{h}$ est une bijection.

2° On munit $\mathbf{h}$ de la loi de composition des applications, notée « $\circ$ ». Calculer $\mathbf{h}^2 = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}$, puis $\mathbf{h}^2 \circ \mathbf{h}^2 = \mathbf{h}^4$. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4\}$ muni de la loi précédente est un groupe.

3° Démontrer qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{C}$, que l'on déterminera, tels que :

$$\mathbf{h}(a) = a \quad \text{et} \quad \mathbf{h}(b) = b.$$

4° Démontrer que $\mathbf{h}^2$ peut se définir très simplement en utilisant la fraction rationnelle $\dfrac{z+1}{z-1}$. Former $\dfrac{Z-a}{Z-b}$ et démontrer que l'on retrouve le résultat de la 2ième question.

5° On considère, dans le plan complexe, un cercle Γ contenant les points d'affixes a et b et ne contenant pas le point d'affixe $1 + i\sqrt{2}$. Quelle est l'image de Γ par l'application définie par $\mathbf{h}$?

4.93 Dans le plan complexe, on désigne par m, M, M_1, les points d'affixes respectives z, Z, Z_1 et par A et A' les points d'affixes 1 et -1.

1° La relation $Z\overline{Z}_1 = 1$ définit une application qui, au point M d'affixe Z, associe le point M_1 d'affixe Z_1.

La relation $(z - 1)(\overline{Z}_1 - 1)$ définit une application qui, au point m d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe Z_1.

Étudier ces deux applications.

L'élimination de $\overline{Z}_1$ entre les deux relations précédentes conduit à exprimer Z en fonction de z :

$$Z = \mathbf{f}(z).$$

2° On appelle π le demi-plan défini par les points de coordonnées x et y, telles que :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

La transformation définie par $Z = f(z)$ possède deux points invariants d'affixes respectives α et β, le point d'affixe α étant un élément de π.
Démontrer la relation :

$$\frac{Z - \beta}{Z - \alpha} = i\,\frac{z - \beta}{z - \alpha}.$$

En déduire que, si m est un point de π, son transformé M est aussi un point de π.

3° A tout nombre réel k strictement positif, on associe C_k, ensemble des points M dont l'affixe vérifie $|f(z)| = k$.

Déterminer une équation cartésienne de C_k.

4.94 On désigne par T_α l'application qui, à tout point m d'affixe z, fait correspondre le point M d'affixe Z telle que :

$$Z = \frac{z(\cos\alpha + \sin\alpha) - 2\sin\alpha}{z\sin\alpha + (\cos\alpha - \sin\alpha)}, \quad \alpha \text{ réel.}$$

1° Démontrer que l'application T_α admet une application inverse, que l'on caractérisera par une relation analogue à celle qui caractérise T_α.

2° Démontrer que l'application T_α admet en général deux points doubles P et Q, dont on calculera les affixes p et q (on désignera par P celui des deux points qui a une ordonnée positive).

3° Démontrer que la relation qui caractérise T_α peut être écrite sous la forme :

$$\frac{Z - p}{Z - q} = \lambda\,\frac{z - p}{z - q},$$

dans laquelle λ est un nombre complexe indépendant de z. Calculer λ en fonction de α. En déduire :

a) une relation entre les rapports de longueurs $\dfrac{MP}{MQ}$ et $\dfrac{mP}{mQ}$;

b) une relation entre les angles $(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{mP}, \overrightarrow{mQ}})$.

4° Déterminer la courbe transformée par T_α de la droite PQ.

Préciser les cas particuliers. Déduire de cette étude une construction géométrique simple de M à partir de m.

5° Plus généralement, on considère deux points quelconques m_1 et m_2, d'affixes respectives z_1 et z_2 ; on désigne par M_1 et M_2, d'affixes respectives Z_1 et Z_2, leurs transformés respectifs par T_α.

Calculer le complexe μ tel que :

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} = \mu\,\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

En déduire la courbe transformée par T_α d'une droite ou d'un cercle quelconque.

6° A chaque valeur du paramètre α est associée une application T_α. Étudier la structure conférée à l'ensemble de toutes ces applications T_α par la composition des applications.

4.95 On désigne par $\mathbf{T}_\alpha$ l'application qui, à tout point m d'affixe z, fait correspondre le point M d'affixe Z telle que :

$$Z = \frac{(1-\alpha)z + 2(1-i)}{z - \alpha - 3i}. \qquad (1)$$

(Le paramètre α est un complexe, dont on désignera l'image par A.)

1° Démontrer que l'application $\mathbf{T}_\alpha$ admet une transformation inverse $\mathbf{T}_\alpha^{-1}$, que l'on caractérisera par une relation analogue à (1); déterminer la valeur α_0 qu'il convient d'attribuer à α pour que $\mathbf{T}_\alpha^{-1} = \mathbf{T}_\alpha$.

2° Démontrer que l'application $\mathbf{T}_\alpha$ admet deux points doubles P et Q, dont on calculera les affixes respectives p et q (on les choisira tels que $|q| > |p|$). Démontrer que la relation (1) est équivalente à la relation :

$$\frac{Z-p}{Z-q} = \lambda \frac{z-p}{z-q}. \qquad (2)$$

dans laquelle λ est un complexe indépendant de z. Calculer λ en fonction de α.

3° Déterminer l'ensemble L des points A, de telle sorte que λ soit réel; distinguer sur cet ensemble les régions qui correspondent à λ positif et à λ négatif. Déterminer de même l'ensemble L′ des points A, de telle sorte que le module de λ soit égal à 1; indiquer comment varie l'argument de λ quand A décrit L′. (On désignera par P′ et Q′ les points d'affixes respectives $p' = p - 3i$ et $q' = q - 3i$.)

4° Dans cette partie, on suppose λ réel. Interpréter géométriquement la relation (2) et en déduire une construction géométrique simple de M à partir de m. Déterminer l'ensemble des points M quand, m restant fixe, le point A décrit L. Effectuer la construction de M à partir de m, quand α a la valeur α_0.

5° Dans cette partie, on suppose que le module de λ est égal à 1. Interpréter géométriquement la relation (2) et en déduire une construction géométrique simple de M à partir de m. Déterminer l'ensemble des points M quand, m restant fixe, le point A décrit L′. Effectuer la construction de M à partir de m, quand $\alpha = -2i$.

6° Dans le cas général où α, donc aussi λ, est quelconque, indiquer une construction géométrique de M à partir de m. Effectuer cette construction quand $\alpha = 2 - i$.

4.96 Soit un anneau commutatif unitaire (A, +, .), où l'élément neutre de l'addition est noté 0, où l'élément neutre de la multiplication est noté e. Soit α un élément de A.

A. 1° Soit $\mathcal{A}$ le produit cartésien A × A. On munit cet ensemble d'une addition et d'une multiplication définies par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac + \alpha bd, ad + bc).$$

Démontrer que ($\mathcal{A}$, +, .) est un anneau commutatif unitaire.

2° Soit $\mathcal{A}_*$ le produit A × {0}. Démontrer que l'on peut y définir, par restriction des lois de $\mathcal{A}$, une structure d'anneau.

Si l'on note :

$$\mathbf{f} = [a \longmapsto (a, 0)]$$

f est un isomorphisme de A sur $\mathcal{A}_*$. On identifiera désormais A et $\mathcal{A}_*$.

3° Soit $\omega = (0, e)$.

Démontrer l'égalité :

$$\omega^2 = (\alpha, 0).$$

4° On suppose désormais que A est un anneau intègre et que l'égalité $(2x = 0)$. implique la nullité de x.

Résoudre l'équation définie par :

$$(x, y)(x, y) = (\alpha, 0).$$

En déduire que tout élément z de $\mathcal{A}$ peut s'écrire sous la forme :

$$z = a + \omega b \quad (a \in \text{A}, \quad b \in \text{A}, \quad \omega^2 = \alpha).$$

B. On suppose, dans cette question, que α est nul et que A est le corps des nombres réels; $\mathcal{A}$ est alors l'ensemble des *nombres duaux*.

1° Démontrer que $\mathcal{A}$ n'est pas intègre.

2° Déterminer les éléments de $\mathcal{A}$ qui admettent un inverse pour la multiplication.

3° Étudier l'unicité de la décomposition :

$$z = a + \varepsilon b, \quad \varepsilon = (0, 1).$$

4° Étudier l'existence de racines carrées du nombre dual :

$$z = a + \varepsilon b.$$

5° Résoudre l'équation du second degré définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (p \in \mathcal{A}, \quad q \in \mathcal{A}).$$

C. On suppose que A est intègre, qu'il n'existe aucun élément β dans A tel que $\alpha = \beta^2$, et que l'égalité $(2x = 0)$ implique la nullité de x.

1° Étudier l'unicité de la décomposition :

$$z = a + \omega b \quad (a \in \text{A}, \quad b \in \text{A}, \quad \omega^2 = \alpha).$$

2° On notera désormais :

$$\bar{z} = a - \omega b.$$

Démontrer que l'application :

$$\mathbf{f}\,[z \longmapsto \bar{z}]$$

satisfait aux égalités :

$$\mathbf{f}(z + z') = \mathbf{f}(z) + \mathbf{f}(z'), \quad \mathbf{f}(zz') = \mathbf{f}(z)\,\mathbf{f}(z').$$

Quelle est la nature de $\mathbf{f}$?

3° On pose $\varphi(z) = z\bar{z}$.

Démontrer les égalités :

$$\varphi(z) = a^2 - \alpha b^2;$$
$$\varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z').$$

4° Démontrer que l'élément z admet un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi(z)$ admet un inverse dans A. En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps si A est un corps.

D. On suppose que A est un corps, qu'il n'existe aucun élément β dans A tel que $\alpha = \beta^2$ et que l'égalité $(2x = 0)$ implique la nullité de x.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}(\alpha)$ des matrices carrées d'ordre deux à éléments dans A de la forme :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1° Définir sur $\mathcal{M}(\alpha)$ une addition et une multiplication, inspirées de celles des matrices réelles, qui lui donne une structure d'anneau commutatif.

2° Démonrer que $\mathcal{M}(\alpha)$ est un corps.

3° Retrouver ce résultat en considérant l'application :

$$\boldsymbol{a} = [a + \omega b \quad \longmapsto \quad M(a, b)].$$

4° Résoudre l'équation définie sur $\mathcal{A}$ par : $z^2 - \alpha = 0$.

5° *Application.* On prend $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Démontrer que l'on peut prendre $\alpha = \bar{2}$. Combien $\mathcal{A}$ possède-t-il d'éléments ? Construire les tables de ce corps.

6° Examiner le cas où A est l'un des corps $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ (nombres rationnels ou réels) et où $\alpha = -1$.

Index

Table des matières

Imprimé en France
par Hérissey à Évreux
Dépôt légal n° 4463, 12, 1971
Collection n° 61
Édition n° 01

 13 / 3947 / 2

CLASSIQUES HACHETTE

13/3947/2

IMPRIMÉ EN FRANCE PAR
VIALE BOUIN et Cie PARIS